Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана

Методические указания

**Г.А. Кокотушкин, А.А. Федотов,
П.В. Храпов**

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ АЛГЕБРЫ И ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ

Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана

Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана

Г.А. Кокотушкин, А.А. Федотов, П.В. Храпов

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ АЛГЕБРЫ
И ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ

Методические указания
к выполнению лабораторных работ
по курсу «Численные методы»

Москва
Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана
2011

УДК 518.12
ББК 22.193
К59

Рецензент *В.Ю. Чуев*

Кокотушкин Г.А.

К59 Численные методы алгебры и приближения функций : метод. указания к выполнению лабораторных работ по курсу «Численные методы» / Г.А. Кокотушкин, А.А. Федотов, П.В. Храпов. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011. — 58, [2] с. : ил.

Рассмотрены численные методы решения систем линейных алгебраических уравнений (метод Гаусса, LU-разложение, метод квадратного корня, метод прогонки), систем нелинейных уравнений (метод простых итераций, метод Ньютона) и методы приближения функций (интерполяционные многочлены, интерполяция сплайнами, метод наименьших квадратов). Приведены варианты индивидуальных заданий к лабораторным работам.

Для студентов 2-го курса факультетов МТ и РК МГТУ им. Н.Э. Баумана. Пособие может быть использовано студентами других факультетов.

Методические указания рекомендованы Учебно-методической комиссией НУК ФН.

УДК 518.12
ББК 22.193

ПРЕДИСЛОВИЕ

Пособие содержит теоретический материал и варианты заданий к лабораторным работам по разделам «Численные методы алгебры» и «Приближение функций» курса «Численные методы».

Глава 1 посвящена изучению методов решения систем линейных уравнений. Определяются различные нормированные пространства, вводятся и обсуждаются понятия нормы матрицы, устойчивости системы линейных алгебраических уравнений. Дается алгоритм степенного метода, рассматривается его применение для нахождения меры обусловленности симметричных матриц. Излагаются метод Гаусса, метод Гаусса с выбором главного элемента, алгоритм LU-разложения, метод квадратного корня, метод прогонки для решения трехдиагональной системы линейных алгебраических уравнений, численные методы решения систем нелинейных уравнений: метод простых итераций и метод Ньютона.

В главе 2 представлены численные методы интерполяции. Рассматривается интерполяционный многочлен Лагранжа, дается оценка его погрешности. Изучаются сплайн-интерполяция и метод наименьших квадратов.

Приведены варианты индивидуальных заданий к лабораторным работам.

Для студентов 2-го курса факультетов МТ и РК МГТУ им. Н.Э. Баумана. Пособие может быть использовано студентами других факультетов.

1. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ АЛГЕБРЫ

1.1. Устойчивость системы линейных алгебраических уравнений

Нормированные пространства. Свойства нормы матрицы

Определение. Нормированным пространством называется линейное пространство L, в котором для любого элемента $x \in L$ определен функционал $\|x\|$ (норма x), такой, что выполняются условия:

1) $\|x\| \geq 0$, причем $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$, $\forall \lambda \in R$;

3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $\forall x,\ y \in L$.

Пример 1. Рассмотрим пространство R^1. Здесь $\|x\| = |x|$, $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Пример 2. Пусть R_1^n — n-мерное пространство. Здесь $\|\vec{x}\| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$, $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$. Проверим выполнение условия 3:

$$\|\vec{x} + \vec{y}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i| \leq \sum_{i=1}^{n} \left(|x_i| + |y_i|\right) = \|\vec{x}\|_1 + \|\vec{y}\|_1 .$$

Пример 3. Пусть R_2^n — n-мерное евклидово пространство, $\|\vec{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$ — евклидова норма.

В общем случае равенство $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$ определяет норму в евклидовом пространстве.

Пример 4. Пусть R^n_∞ — n-мерное пространство с нормой $\|\vec{x}\|_\infty = \max\limits_{i=1,\dots,n} |x_i|$.

Проверим выполнение условия 3 в определении нормированного пространства:

$$\|\vec{x}+\vec{y}\| = \max_{i=1,\dots,n} |x_i + y_i| \le \max_{i=1,\dots,n} \left(|x_i| + |y_i|\right) \le \max_{i=1,\dots,n} |x_i| + \max_{i=1,\dots,n} |y_i| = \|\vec{x}\|_\infty + \|\vec{y}\|_\infty .$$

Пример 5. Пусть $C[a,b]$ — пространство непрерывных на $[a,b]$ функций; $\|f\| = \max\limits_{t\in[a,b]} |f(t)|$.

Докажем выполнение условия 3 в определении нормированного пространства:

$$\|f+g\| = \max_{t\in[a,b]} |f(t)+g(t)| \le \max_{t\in[a,b]} \left(|f(t)| + |g(t)|\right) \le$$
$$\le \max_{t\in[a,b]} |f(t)| + \max_{t\in[a,b]} |g(t)| = \|f\| + \|g\|.$$

Пример 6. Пусть R^n_p — n-мерное пространство с нормой $\|x\|_p = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}$, $p \ge 1$.

Пример 7. Рассмотрим пространство матриц вида

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Введем норму матрицы A:

$$\|A\| = \sup_{x\ne 0} \frac{\|A\vec{x}\|}{\|\vec{x}\|} = \sup_{\|y\|=1} \|A\vec{y}\|, \text{ поскольку } \frac{\|A\vec{x}\|}{\|\vec{x}\|} = \left\| A\left(\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}\right)\right\|, \quad \left\|\left(\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}\right)\right\| = 1.$$

Пример 8. Пусть $A : R_2^2 \to R_2^2$, отображение задается матрицей $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Параметризуем окружность единичного радиуса:

$$\begin{cases} x_1 = \cos t, \\ x_2 = \sin t, \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 = 4\cos t, \\ y_2 = \sin t. \end{cases}$$

Тогда, как это видно на рис. 1.1.1, $\|A\| = 4$.

В общем случае, если A — симметричная матрица, λ_1, λ_2, λ_3, …, λ_n — ее собственные числа, то евклидова норма $\|A\| = \max\limits_{i=1,\dots,n} |\lambda_i|$.

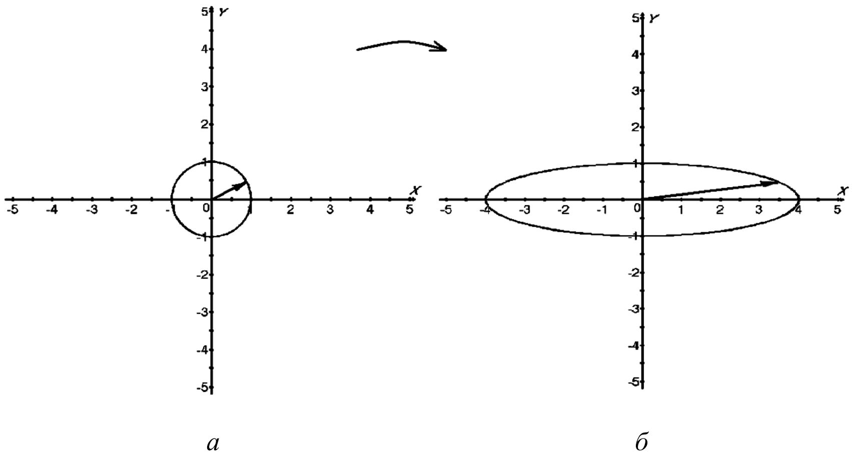

Рис. 1.1.1. Иллюстрация понятия нормы в двумерном евклидовом пространстве:
а — окружность единичного радиуса; *б* — ее образ

Рассмотрим *свойства нормы* матрицы:

1) $\|A + B\| \le \|A\| + \|B\|$;

2) $\|AB\| \le \|A\| \cdot \|B\|$.

Для доказательства свойств 1 и 2 нам понадобится следующее утверждение.

Утверждение. Имеет место неравенство $\|Ax\| \le \|A\| \cdot \|x\|$.

Из определения нормы матрицы

$$\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \le \|A\|.$$

Отсюда следует утверждение.

Докажем свойства нормы матрицы.

1. Запишем цепочку неравенств

$$\|(A+B)x\| = \|Ax + Bx\| \le \|Ax\| + \|Bx\| \le \|A\| \cdot \|x\| + \|B\| \cdot \|x\|.$$

Поделим все части неравенств на $\|x\|$:

$$\frac{\|(A+B)x\|}{\|x\|} \le \|A\| + \|B\| \Rightarrow \|A+B\| \le \|A\| + \|B\|.$$

2) Аналогично

$$\|(AB)x\| = \|A(Bx)\| \le \|A\| \cdot \|Bx\| \le \|A\| \cdot \|B\| \cdot \|x\|.$$

Осталось поделить все части равенств на $\|x\|$.

Пример 9. Пусть $A : R^n \to R^n, \|\vec{x}\|_\infty = \max\limits_{i=1,\dots,n} |x_i|$. Тогда

$$\|A\vec{x}\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j \right| \le$$

$$\le \max_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \cdot |x_j| \le \max_{j=1,\dots,n} |x_j| \cdot \max_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| =$$

$$= \max_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \cdot \|x\|_\infty \Rightarrow \|A\|_\infty \le \max_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

На самом деле

$$\|A\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|; \qquad \|A\|_1 = \max_{j=1,\dots,n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|.$$

Если

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}, \text{ то } \|A\|_\infty = 10, \qquad \|A\|_1 = 18.$$

Устойчивость системы линейных алгебраических уравнений

Система устойчива, если при небольшом изменении входных данных изменения решения будут небольшими. Пусть

$$A\vec{x} = \vec{f}, \text{ где } A = (a_{ij})_{mxm}.$$

Тогда

$$(A + \delta A)(\vec{x} + \delta\vec{x}) = \vec{f} + \delta\vec{f},$$

где δA — погрешность матрицы коэффициентов A; $\delta\vec{x}$ — погрешность решения $\vec{x}$; $\delta\vec{f}$ — погрешность правой части $\vec{f}$ уравнения.

Если $\delta\vec{f} = 0,$ то рассматривают коэффициентную устойчивость.

Если $\delta A = 0,$ то рассматривают устойчивость по правой части.

Определение. Система линейных алгебраических уравнений устойчива, если существует константа $C > 0,$ такая, что $\|\delta\vec{x}\| \le C \cdot \|\delta\vec{f}\|.$

Далее будем предполагать, что $\delta A = 0,$ т. е. рассматривать устойчивость по правой части. Тогда

$$A\delta\vec{x} = \delta\vec{f}; \;\; \delta\vec{x} = A^{-1}\delta\vec{f}.$$

Отсюда

$$\frac{\|\delta\vec{x}\| / \|\vec{x}\|}{\|\delta\vec{f}\| / \|\vec{f}\|} = \frac{\|A^{-1}\delta\vec{f}\| \cdot \|A\vec{x}\|}{\|\vec{x}\| \cdot \|\delta\vec{f}\|} = \frac{\|A^{-1}\delta\vec{f}\|}{\|\delta\vec{f}\|} \frac{\|A\vec{x}\|}{\|\vec{x}\|} \le \|A\| \cdot \|A^{-1}\| = \nu(A),$$

где $\nu(A)$ — мера обусловленности матрицы A.

Имеет место неравенство

$$\nu(A) \geq 1 \quad \left\{1 = \|E\| = \left\|A \cdot A^{-1}\right\| \leq \|A\| \cdot \left\|A^{-1}\right\| = \nu(A)\right\}.$$

Если $\nu(A) \gg 1$, то матрица A — плохо обусловлена, т. е. небольшие изменения в правой части (норма $\left\|\delta\vec{f}\right\|$ мала) могут привести к существенным изменениям решения.

Пример. Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{pmatrix} 1000 & 0 \\ 0 & 0,001 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1000 \\ 0,001 \end{pmatrix}.$$

Ее решение $x_1 = 1; x_2 = 1$. При этом $\left\|\vec{x}\right\|_\infty = 1$. Сделаем небольшое (по норме) изменение правой части:

$$\delta f_1 = 0,1; \quad \delta f_2 = 0,1; \quad \left\|\delta\vec{f}\right\|_\infty = 0,1.$$

Тогда

$$\begin{pmatrix} 1000 & 0 \\ 0 & 0,001 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,1 \end{pmatrix}.$$

Получим

$$\delta x_1 = 0,0001; \quad \delta x_2 = 100; \quad \left\|\delta\vec{x}\right\|_\infty = 100.$$

При этом

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0,001 & 0 \\ 0 & 1000 \end{pmatrix};$$

$$\|A\|_\infty = 1000;$$

$$\left\|A^{-1}\right\|_\infty = 1000;$$

$$\nu(A) = 1000 \cdot 1000 = 1000000.$$

В общем случае имеет место следующая теорема.

Теорема. Если $\|\delta A\| < \left\|A^{-1}\right\|^{-1}$, то

$$\frac{\|\delta\vec{x}\|}{\|\vec{x}\|} \le \frac{\nu(A)}{1-\nu(A)\dfrac{\|\delta A\|}{\|A\|}}\left(\frac{\|\delta\vec{f}\|}{\|\vec{f}\|}+\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}\right).$$

Степенной метод

Степенной метод позволяет найти наибольшее по модулю собственное значение и собственный вектор квадратной матрицы *A*. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ — собственные числа матрицы *A*. Для определенности предположим, что $|\lambda_1| > |\lambda_2| > ... > |\lambda_m|$. При этом собственному значению λ_i соответствует собственное подпространство (не обязательно одномерное) с базисом $\vec{e}_{i,1}, \vec{e}_{i,2}, ..., \vec{e}_{i,k_i}$. Возьмем произвольный ненулевой вектор $\vec{x}^0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$. Разложим его по базису из собственных векторов $\{\vec{e}_{i,k}\}$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $k = 1, \ldots, k_i$, где k_i — размерность i-го собственного подпространства, соответствующего собственному значению λ_i. Тогда

$$\vec{x}^0 = c_{1,1}\vec{e}_{1,1} + c_{1,2}\vec{e}_{1,2} + ... + c_{1,k_1}\vec{e}_{1,k_1} + c_{2,1}\vec{e}_{2,1} + \cdots$$
$$\cdots + c_{m,1}\vec{e}_{m,1} + ... + c_{m,k_m}\vec{e}_{m,k_m}.$$

Отсюда следует

$$A\vec{x}^0 = \lambda_1 c_{1,1}\vec{e}_{1,1} + \lambda_1 c_{1,2}\vec{e}_{1,2} + ... + \lambda_1 c_{1,k_1}\vec{e}_{1,k_1} + \lambda_2 c_{2,1}\vec{e}_{2,1} + ...$$
$$... + \lambda_m c_{m,1}\vec{e}_{m,1} + ... + \lambda_m c_{m,k_m}\vec{e}_{m,k_m},$$

$$\ldots,$$

$$A^p\vec{x}^0 = \lambda_1^p c_{1,1}\vec{e}_{1,1} + \lambda_1^p c_{1,2}\vec{e}_{1,2} + ... + \lambda_1^p c_{1,k_1}\vec{e}_{1,k_1} + \lambda_2^p c_{2,1}\vec{e}_{2,1} + ...$$
$$... + \lambda_m^p c_{m,1}\vec{e}_{m,1} + ... + \lambda_m^p c_{m,k_m}\vec{e}_{m,k_m}.$$

Видно, что при больших значениях p доминирует вклад от базисных векторов, отвечающих наибольшему по модулю собственному значению λ_1. Отсюда получаем алгоритм степенного метода. Строим последовательность векторов:

$$\vec{x}^1 = \frac{A\vec{x}^0}{\|\vec{x}^0\|}, \quad \vec{x}^2 = \frac{A\vec{x}^1}{\|\vec{x}^1\|}, \quad \ldots, \quad \vec{x}^p = \frac{A\vec{x}^{p-1}}{\|\vec{x}^{p-1}\|}.$$

Критерий окончания процесса $\left\|\vec{x}^p - \operatorname{sign}(x_i^p x_i^{p-1})\vec{x}^{p-1}\right\| < \varepsilon$ (выражение $\operatorname{sign}(x_i^p x_i^{p-1})$) следует учитывать, поскольку собственное значение матрицы может быть отрицательным), где точность ε задана (например, $\varepsilon = 0{,}000\,001$). Тогда $\lambda_1 \approx x_i^p / x_i^{p-1} \|\vec{x}^{p-1}\|$, где $\vec{x}^p = (x_1^p, x_2^p, \ldots, x_n^p)$. Для правильной работы алгоритма важно, чтобы вектор $\vec{x}^0$ содержал ненулевую проекцию на собственное подпространство, отвечающее собственному значению λ_1.

Нахождение меры обусловленности симметричной матрицы A степенным методом

Если A — симметричная матрица, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_m$ — ее собственные числа, то евклидова норма $\|A\| = \max\limits_{i=1,\ldots,m} |\lambda_i|$.

С помощью степенного метода можно найти и норму $\left\|A^{-1}\right\|$. Для этого мы должны построить последовательность

$$\vec{x}^1 = \frac{A^{-1}\vec{x}^0}{\|\vec{x}^0\|}, \; \vec{x}^2 = \frac{A^{-1}\vec{x}^1}{\|\vec{x}^1\|}, \; \ldots, \; \vec{x}^p = \frac{A^{-1}\vec{x}^{p-1}}{\|\vec{x}^{p-1}\|},$$

или

$$A\vec{x}^1 = \frac{\vec{x}^0}{\|\vec{x}^0\|}, \quad A\vec{x}^2 = \frac{\vec{x}^1}{\|\vec{x}^1\|}, \quad \ldots, \quad A\vec{x}^p = \frac{\vec{x}^{p-1}}{\|\vec{x}^{p-1}\|}.$$

То есть на каждом шаге для нахождения значения $\vec{x}^i$ решаем соответствующую систему линейных алгебраических уравнений $A\vec{x}^i = \vec{x}^{i-1} / \|\vec{x}^{i-1}\|$. Критерий окончания процесса

$\left\|\vec{x}^{\,p} - \operatorname{sign}(x_i^p x_i^{p-1})\vec{x}^{\,p-1}\right\| < \varepsilon$, где точность ε задана (в лабораторных работах ε = 0,000 001). Тогда $\lambda_1 \approx x_i^p \big/ x_i^{p-1} \left\|\vec{x}^{\,p-1}\right\|$ и $\left\|A^{-1}\right\| = |\lambda_1|$.

Мера обусловленности матрицы A равна $\nu(A) = \|A\| \cdot \left\|A^{-1}\right\|$.

1.2. Решение систем линейных алгебраических уравнений методом Гаусса

Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) вида

$$A\vec{x} = \vec{b},$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}; \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} a_{1,n+1} \\ a_{2,n+1} \\ \dots \\ a_{n,n+1} \end{pmatrix}.$$

Перепишем ее в развернутом виде:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= a_{1,n+1}; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= a_{2,n+1}; \\ &\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= a_{n,n+1}. \end{aligned} \tag{1.2.1}$$

Прямой ход метода Гаусса

Предположив, что $a_{11} \neq 0$, разделим первое уравнение системы (1.2.1) на a_{11}. Получим

$$x_1 + \sum_{j=2}^{n} a_{1j}^1 x_j = a_{1,n+1}^1. \qquad (1.2.2)$$

Из каждого из оставшихся уравнений в (1.2.1) ($i = 2, 3, \ldots, n$) вычтем уравнение (1.2.2), умноженное на соответствующий коэффициент a_{i1}. Получим

$$\sum_{j=2}^{n} a_{ij}^1 x_j = a_{j,n+1}^1, \qquad i = 2, 3, \ldots, n. \qquad (1.2.3)$$

Предположив, что $a_{22}^1 \neq 0$, разделим первое уравнение в (1.2.3) на a_{22}^1:

$$x_2 + \sum_{j=3}^{n} a_{2j}^2 x_j = a_{2,n+1}^2. \qquad (1.2.4)$$

Из каждого из оставшихся уравнений в (1.2.3) ($i = 3, 4, \ldots, n$) вычтем уравнение (1.2.4), умноженное на соответствующий коэффициент a_{i2}^1. Получим

$$\sum_{j=3}^{n} a_{ij}^2 x_j = a_{i,n+1}^2, \qquad i = 3, 4, \ldots, n. \qquad (1.2.5)$$

В результате придем к системе

$$x_i + \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}^i x_j = a_{i,n+1}^i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \qquad (1.2.6)$$

Прямой ход метода Гаусса завершен.

Обратный ход метода Гаусса

Из формулы (1.2.6) следует

$$x_i = a_{i,n+1}^i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}^i x_j, \qquad i = n, n-1, n-2, \ldots, 1. \qquad (1.2.7)$$

Количество арифметических операций при использовании метода Гаусса составляет порядка const n^3.

Для того чтобы повысить точность вычислений и избежать возможного деления на нуль (см. выше: «В предположении, что $a_{11} \neq 0$…»), используют метод Гаусса с выбором главного элемента.

Метод Гаусса с выбором главного элемента

Пусть на k-м шаге (при $k = 0$ — исходная система уравнений) получена система уравнений:

$$x_i + \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}^i x_j = a_{i,n+1}^i, \quad i = 1, 2, \ldots, k;$$

$$\sum_{j=k+1}^{n} a_{ij}^k x_j = a_{i,n+1}^k, \quad i = k+1, k+2, \ldots, n.$$

Пусть

$$\left|a_{l,k+1}^k\right| = \max\left|a_{i,k+1}^k\right|, \; i = k+1, \ldots, n.$$

Переставляем местами l-ю и $(k+1)$-ю строки. Если при этом $\left|a_{l,k+1}^k\right| = 0,$ то это означает, что определитель матрицы A равен нулю и система уравнений либо не имеет решений, либо имеет их бесконечно много (теорема Кронекера — Капелли).

Далее продолжаем применять стандартный метод Гаусса, пока не спустимся на ступеньку ниже, после чего повторим процедуру.

Пример. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 1 & 7 \\ 8 & 2 & 0 & -2 \\ 6 & 6 & 6 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \\ 38 \\ 16 \\ 60 \end{pmatrix}.$$

Поделим первую строку на $a_{11} = 1$ и вычтем получившуюся строку из второй, третьей и четвертой строк, домножив первую строку на $a_{21} = 3$, $a_{31} = 8$, $a_{41} = 6$ соответственно. В результате получим

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -8 & -5 \\ 0 & -14 & -24 & -34 \\ 0 & -6 & -12 & -15 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \\ -28 \\ -160 \\ -72 \end{pmatrix}.$$

Поделим вторую строку на $a_{22}^1 = -1,$ вычтем получившуюся строку из третьей и четвертой строк, домножив вторую строку на $a_{32}^1 = -14,$ $a_{42}^1 = -6$ соответственно. В результате получим

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 88 & 36 \\ 0 & 0 & 36 & 15 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \\ 28 \\ 232 \\ 96 \end{pmatrix}.$$

Делим третью строку на $a_{33}^2 = 88$ и вычитаем ее из четвертой строки, домножив третью строку на $a_{43}^2 = 36.$ Будем иметь

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 9/22 \\ 0 & 0 & 0 & -3/11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \\ 28 \\ 29/11 \\ -12/11 \end{pmatrix}.$$

Находим

$$x_4 = \frac{-12}{11} : \left(\frac{-3}{11}\right) = 4;$$

$$x_3 = \frac{29}{11} - 4 \cdot \frac{9}{22} = 1;$$

$$x_2 = 28 - (8 \cdot 1 + 5 \cdot 4) = 28 - 28 = 0;$$

$$x_1 = 22 - (2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 4) = 22 - 19 = 3.$$

Задание к лабораторной работе «Метод Гаусса с выбором главного элемента»

1. Решить СЛАУ аналитически методом Гаусса с выбором главного элемента (табл. 1.2.1 или 1.2.2 по указанию преподавателя).

2. Написать программу решения СЛАУ методом Гаусса с выбором главного элемента. Решить с ее помощью СЛАУ.

3. Оформить отчет о лабораторной работе:

а) теоретическая часть;

б) аналитическое решение системы;

в) текст программы;

г) результаты решения СЛАУ.

Таблица 1.2.1

Варианты (1–30) задания для решения СЛАУ $A\vec{x} = \vec{b}$ с четырьмя неизвестными в виде ($A \mid \vec{b}$) методом Гаусса

<table>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td>1 –2 0 –3 | –19
–2 0 4 –4 | –22
–3 –5 4 1 | –23
4 4 –1 0 | 21</td><td>2 1 1 –2 | 5
4 3 3 –2 | 3
–3 1 –5 –3 | 7
–5 1 1 0 | 11</td><td>–1 0 –2 –4 | –12
0 –1 3 –1 | 2
–3 1 –3 –1 | –2
3 –3 0 2 | 6</td></tr>
<tr><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr>
<tr><td>–1 –2 3 4 | –13
–5 2 4 –2 | –14
4 3 –2 –1 | 2
1 –2 –1 –3 | 23</td><td>–2 –2 –2 –3 | 25
0 0 –1 –2 | 3
–4 –3 –4 –4 | 48
–3 –4 –2 –2 | 39</td><td>–2 0 –1 –1 | 5
–2 –1 4 4 | –33
3 –1 –3 3 | –3
4 4 –1 –4 | 35</td></tr>
<tr><td>7</td><td>8</td><td>9</td></tr>
<tr><td>–3 4 –5 4 | 7
2 –1 –2 –1 | 6
4 0 0 –4 | 12
–3 –3 –3 –1 | –1</td><td>1 3 2 –1 | –11
–1 –5 –5 –3 | 9
4 0 0 0 | –12
–1 –4 –4 1 | 18</td><td>–2 –1 –2 –3 | –7
–3 4 2 –4 | –46
–4 –2 –2 –2 | –8
–3 4 0 2 | –22</td></tr>
<tr><td>10</td><td>11</td><td>12</td></tr>
<tr><td>–5 1 4 4 | 28
0 –5 –1 1 | –7
–2 2 4 2 | 8
2 –5 2 –3 | –45</td><td>–5 4 4 2 | –27
–4 –4 –1 –4 | 16
3 2 –1 1 | 4
1 3 –2 2 | 2</td><td>2 0 1 1 | –15
–2 0 –3 –4 | 31
–3 4 1 –1 | –11
–5 –3 1 –2 | 34</td></tr>
</table>

Окончание табл. 1.2.1

13	**14**	**15**
$\begin{array}{rrrr\|r} -3 & -2 & -4 & 3 & 38 \\ -2 & -4 & -5 & -5 & 10 \\ 0 & 2 & 2 & -4 & -26 \\ -5 & 4 & 4 & 4 & 16 \end{array}$	$\begin{array}{rrrr\|r} 3 & -5 & 2 & 4 & 31 \\ -3 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 4 & -4 & 0 & -5 & -3 \\ 2 & 0 & 4 & -4 & 2 \end{array}$	$\begin{array}{rrrr\|r} 0 & -1 & 4 & -4 & -20 \\ 1 & 3 & -1 & 1 & 15 \\ -3 & 4 & -3 & -3 & 37 \\ -4 & 1 & -3 & 1 & 22 \end{array}$
16	**17**	**18**
$\begin{array}{rrrr\|r} -1 & -1 & -1 & -1 & 4 \\ -4 & -5 & -1 & 3 & -4 \\ -2 & 1 & 1 & 4 & -28 \\ 0 & -4 & -1 & -3 & 31 \end{array}$	$\begin{array}{rrrr\|r} 4 & -3 & 4 & -4 & -6 \\ -2 & -4 & 0 & -5 & 10 \\ 3 & -3 & 0 & 3 & -24 \\ -5 & 2 & -3 & 3 & 12 \end{array}$	$\begin{array}{rrrr\|r} 1 & -5 & -4 & -2 & -24 \\ -4 & -1 & -3 & 2 & -15 \\ -1 & 0 & 0 & -5 & 27 \\ -2 & -1 & 1 & -4 & 23 \end{array}$
19	**20**	**21**
$\begin{array}{rrrr\|r} -2 & -3 & 0 & 2 & 8 \\ 3 & -4 & -3 & 4 & -10 \\ -4 & -3 & -4 & 3 & 6 \\ 2 & 2 & -5 & 3 & -5 \end{array}$	$\begin{array}{rrrr\|r} 0 & 3 & -3 & -5 & -3 \\ 1 & -5 & -5 & 4 & -1 \\ -3 & -5 & 1 & 1 & 16 \\ -2 & 0 & -4 & 2 & -16 \end{array}$	$\begin{array}{rrrr\|r} -1 & -5 & 3 & -3 & -30 \\ 0 & 4 & -4 & 2 & 28 \\ 0 & -4 & -2 & -3 & -18 \\ -1 & -5 & -4 & 0 & -10 \end{array}$
22	**23**	**24**
$\begin{array}{rrrr\|r} 2 & -1 & -3 & -5 & 20 \\ 4 & -4 & 3 & 1 & 35 \\ -5 & 4 & -3 & 4 & -53 \\ 1 & -3 & 2 & 0 & 22 \end{array}$	$\begin{array}{rrrr\|r} 1 & -2 & -5 & 4 & -25 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -3 \\ 4 & 2 & 1 & 4 & -21 \end{array}$	$\begin{array}{rrrr\|r} 2 & 0 & 3 & 0 & -8 \\ -4 & 3 & -2 & 4 & -3 \\ -3 & -2 & -3 & -5 & 15 \\ -1 & 2 & 2 & -2 & 2 \end{array}$
25	**26**	**27**
$\begin{array}{rrrr\|r} 1 & 3 & -2 & -5 & -11 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & -1 \\ -2 & -3 & -3 & 2 & -4 \\ 4 & -2 & -2 & -5 & -25 \end{array}$	$\begin{array}{rrrr\|r} -2 & 1 & 1 & 3 & -7 \\ -4 & -3 & 0 & -4 & 21 \\ -5 & -4 & -5 & -1 & 48 \\ 1 & -3 & 4 & -3 & -10 \end{array}$	$\begin{array}{rrrr\|r} 4 & -4 & -1 & 3 & 14 \\ 3 & -1 & -1 & -1 & 10 \\ -1 & 2 & -2 & -5 & 2 \\ 4 & 3 & 0 & 1 & -14 \end{array}$
28	**29**	**30**
$\begin{array}{rrrr\|r} 4 & -3 & 2 & -1 & -4 \\ 1 & 3 & 4 & 1 & 5 \\ -4 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & -4 & 8 \end{array}$	$\begin{array}{rrrr\|r} 0 & 2 & 4 & 1 & -4 \\ -1 & -4 & -4 & 0 & 20 \\ 3 & -3 & 4 & -4 & -1 \\ -2 & -4 & -3 & -2 & 21 \end{array}$	$\begin{array}{rrrr\|r} -1 & -5 & 2 & -1 & 34 \\ 3 & 4 & -1 & -1 & -36 \\ 4 & 0 & -2 & 1 & -21 \\ -5 & 0 & 3 & 4 & 33 \end{array}$

Таблица 1.2.2

Варианты заданий (1–30) для решения СЛАУ $A\vec{x}=\vec{b}$ с пятью неизвестными в виде ($A \mid \vec{b}$) методом Гаусса

1	**2**
$\begin{array}{rrrrr\|r} 1 & -5 & -1 & -5 & -5 & -17 \\ 0 & 1 & -1 & -5 & 3 & -22 \\ -3 & 4 & -3 & -3 & -3 & 22 \\ -3 & -2 & 0 & 4 & -5 & 39 \\ 3 & -4 & 4 & 4 & -3 & -9 \end{array}$	$\begin{array}{rrrrr\|r} 1 & -3 & 1 & 0 & -5 & 22 \\ -4 & 0 & 2 & 4 & -1 & 35 \\ -2 & -4 & -2 & 2 & 1 & -3 \\ -4 & -3 & -1 & 4 & -4 & 38 \\ 1 & 4 & 3 & 3 & -5 & 44 \end{array}$
3	**4**
$\begin{array}{rrrrr\|r} 0 & -5 & 1 & -5 & 0 & 27 \\ 1 & -3 & 1 & 1 & -4 & -10 \\ 2 & 3 & -5 & -3 & 4 & 41 \\ -4 & -5 & 1 & 4 & 3 & -24 \\ 1 & -5 & 1 & -5 & -4 & 22 \end{array}$	$\begin{array}{rrrrr\|r} -2 & 4 & 1 & 3 & -1 & 28 \\ 2 & -5 & 4 & -2 & -1 & -17 \\ 3 & -2 & 4 & 2 & 4 & -28 \\ -1 & 2 & 2 & 1 & 4 & -3 \\ -4 & -5 & -1 & 4 & -5 & 24 \end{array}$
5	**6**
$\begin{array}{rrrrr\|r} -4 & -2 & 1 & -5 & -1 & -17 \\ -3 & 2 & 3 & 2 & -1 & 12 \\ -2 & 0 & -4 & 4 & -3 & -5 \\ -4 & 3 & -5 & 3 & -2 & -20 \\ 2 & 2 & 0 & -2 & -5 & -15 \end{array}$	$\begin{array}{rrrrr\|r} 4 & -2 & 4 & 1 & -3 & -13 \\ -4 & 3 & 0 & -1 & -3 & 15 \\ 3 & 3 & 2 & -4 & 0 & -4 \\ 1 & -2 & -2 & -1 & 3 & -9 \\ -2 & -2 & -3 & -1 & -3 & -12 \end{array}$
7	**8**
$\begin{array}{rrrrr\|r} -1 & 4 & 3 & 1 & 4 & 29 \\ -1 & -3 & 3 & -5 & 3 & 48 \\ -1 & -3 & -4 & 2 & -2 & -35 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 4 & 7 \\ 2 & 3 & -2 & 4 & 0 & -29 \end{array}$	$\begin{array}{rrrrr\|r} 0 & -3 & -2 & -2 & 0 & 4 \\ 1 & -4 & 0 & -4 & -5 & -14 \\ 2 & 2 & 1 & 4 & -4 & -13 \\ 2 & -3 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 4 & -5 & -3 & -3 & 4 & -1 \end{array}$
9	**10**
$\begin{array}{rrrrr\|r} 2 & 4 & -2 & -1 & -4 & -31 \\ -3 & -5 & -3 & -2 & 3 & 2 \\ -4 & 3 & 2 & 3 & 2 & 28 \\ -2 & -5 & 4 & 0 & 3 & 34 \\ -5 & -3 & -3 & 2 & 4 & 19 \end{array}$	$\begin{array}{rrrrr\|r} 2 & -1 & 2 & -2 & -1 & 10 \\ 4 & -1 & -2 & 0 & -5 & -10 \\ 3 & -1 & -3 & -3 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 4 & -2 & -4 & 17 \\ 0 & 1 & -5 & 3 & -5 & -26 \end{array}$

11	**12**
$\begin{array}{rrrrr\|r} 4 & -1 & 4 & -5 & 3 & -5 \\ 2 & -4 & -3 & 2 & 0 & -10 \\ 3 & 3 & 3 & 2 & 0 & -10 \\ -5 & -5 & -5 & -2 & -5 & 9 \\ 3 & 3 & -3 & -3 & -4 & 8 \end{array}$	$\begin{array}{rrrrr\|r} -5 & -3 & -3 & -5 & 4 & -54 \\ -4 & 3 & -3 & 4 & -1 & -13 \\ 1 & -3 & 0 & -2 & -2 & -3 \\ -5 & -1 & -1 & -3 & -3 & -24 \\ -1 & 2 & 0 & -5 & -1 & -1 \end{array}$
13	**14**
$\begin{array}{rrrrr\|r} 2 & -3 & 1 & -4 & -1 & 25 \\ 2 & 4 & -3 & -5 & 2 & 32 \\ 2 & 0 & -2 & -3 & 3 & 30 \\ -3 & -4 & -1 & -1 & 4 & 23 \\ 4 & -2 & 1 & -3 & -4 & 16 \end{array}$	$\begin{array}{rrrrr\|r} -3 & 4 & 4 & 2 & 3 & 14 \\ 3 & 2 & 0 & -1 & -5 & -27 \\ 4 & -2 & -2 & -1 & -1 & -14 \\ 4 & 1 & 1 & -1 & 1 & -15 \\ 4 & 4 & -4 & -1 & 2 & -49 \end{array}$
15	**16**
$\begin{array}{rrrrr\|r} -4 & -1 & 3 & 0 & -4 & -26 \\ -3 & -2 & 3 & -4 & 3 & 12 \\ -2 & -5 & 1 & -3 & 4 & 25 \\ 4 & -4 & 0 & 4 & 0 & -4 \\ 4 & -3 & 1 & -4 & -1 & 28 \end{array}$	$\begin{array}{rrrrr\|r} 2 & 0 & -5 & -2 & 4 & 43 \\ 0 & 0 & -4 & -1 & 4 & 28 \\ -5 & -3 & -4 & -3 & -4 & 16 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & -3 & -2 \\ 3 & 4 & 1 & -3 & 4 & 16 \end{array}$
17	**18**
$\begin{array}{rrrrr\|r} 4 & 1 & 4 & -3 & 4 & 22 \\ -3 & 1 & -5 & -2 & -5 & -16 \\ 0 & -5 & 0 & -1 & 4 & 10 \\ 1 & -2 & -2 & -2 & -4 & -20 \\ 1 & -1 & 2 & 3 & -1 & -9 \end{array}$	$\begin{array}{rrrrr\|r} -3 & -3 & -4 & -4 & 0 & -34 \\ -2 & -2 & 2 & -5 & -3 & -12 \\ -1 & -5 & -4 & -5 & -2 & -46 \\ -1 & -3 & 2 & -3 & -1 & -14 \\ -2 & 4 & 3 & 1 & -2 & 37 \end{array}$
19	**20**
$\begin{array}{rrrrr\|r} 3 & -5 & 2 & -4 & -4 & -33 \\ -3 & -5 & 1 & -4 & -1 & -16 \\ 4 & 0 & 2 & 4 & 4 & -16 \\ -2 & 2 & 4 & 3 & -1 & 10 \\ 3 & 2 & 0 & -2 & 1 & -4 \end{array}$	$\begin{array}{rrrrr\|r} 1 & -5 & -1 & 2 & 0 & -13 \\ -5 & 0 & -1 & -1 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & -4 & -4 & -2 & -4 \\ -2 & 0 & -5 & -3 & 1 & -6 \\ -4 & 1 & 3 & 1 & -4 & 8 \end{array}$
21	**22**
$\begin{array}{rrrrr\|r} -4 & 1 & 0 & 1 & -1 & 24 \\ 3 & -3 & -3 & 2 & -3 & 5 \\ 4 & 4 & -3 & 3 & 1 & 11 \\ 3 & 4 & 1 & -5 & -5 & -17 \\ -1 & -5 & 1 & 4 & -4 & 15 \end{array}$	$\begin{array}{rrrrr\|r} -1 & -5 & -1 & -5 & -4 & -14 \\ -3 & 2 & 2 & -5 & -3 & 24 \\ 3 & -2 & -2 & 3 & -1 & -16 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 3 & 7 \\ 3 & -1 & 3 & 2 & -3 & -3 \end{array}$

23	**24**
$\begin{array}{rrrrr\|r} 4 & -1 & -3 & 3 & -5 & -23 \\ -2 & -5 & 2 & -5 & -3 & 34 \\ 2 & 4 & 3 & 2 & -2 & -31 \\ 3 & 4 & 3 & -2 & 4 & 0 \\ -2 & -4 & 2 & -1 & 2 & 21 \end{array}$	$\begin{array}{rrrrr\|r} 0 & -2 & -1 & 0 & 4 & 25 \\ 1 & 3 & -3 & -1 & 0 & -19 \\ 1 & 1 & 1 & -2 & 3 & 3 \\ -5 & 2 & 1 & -5 & -2 & -52 \\ -3 & 2 & 1 & 2 & -4 & -26 \end{array}$
25	**26**
$\begin{array}{rrrrr\|r} 3 & 1 & -4 & -2 & -5 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 1 & 1 & 8 \\ 4 & -2 & -2 & -4 & -1 & -17 \\ 4 & -3 & 1 & 1 & -1 & -17 \\ 4 & 4 & -3 & 3 & -5 & 7 \end{array}$	$\begin{array}{rrrrr\|r} -3 & -2 & -2 & 1 & -5 & -11 \\ -5 & 0 & 2 & -4 & 2 & -9 \\ -4 & 1 & -1 & 1 & -2 & -11 \\ -4 & 2 & 0 & 3 & -1 & -4 \\ -4 & 3 & 0 & -5 & -2 & -34 \end{array}$
27	**28**
$\begin{array}{rrrrr\|r} 1 & 3 & 4 & -1 & -4 & 28 \\ 3 & 4 & -5 & -5 & -3 & -16 \\ 3 & -3 & 4 & 0 & -1 & 36 \\ -2 & -5 & 3 & -2 & -2 & 31 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & -3 & 21 \end{array}$	$\begin{array}{rrrrr\|r} 0 & -2 & -2 & -3 & -2 & 16 \\ 0 & 3 & -2 & 4 & 3 & -32 \\ 3 & -2 & 4 & 0 & 3 & 3 \\ -2 & -4 & 0 & 1 & 4 & -36 \\ 4 & -3 & -4 & -2 & -3 & 28 \end{array}$
29	**30**
$\begin{array}{rrrrr\|r} 3 & -1 & 2 & 3 & 0 & 34 \\ -4 & -1 & -2 & 3 & 1 & -7 \\ -3 & -4 & 2 & 2 & 4 & 24 \\ -3 & -1 & 4 & 0 & -4 & -6 \\ -1 & -1 & -2 & -5 & 1 & -27 \end{array}$	$\begin{array}{rrrrr\|r} -3 & 0 & -1 & -5 & -5 & 17 \\ 3 & -3 & 0 & -4 & -2 & -7 \\ -5 & 3 & -5 & -2 & -3 & 28 \\ -3 & -1 & 2 & 4 & 1 & 10 \\ 3 & -5 & -3 & -3 & -3 & 1 \end{array}$

1.3. Решение систем линейных алгебраических уравнений с помощью LU-разложения

Рассмотрим систему уравнений $A\vec{x} = \vec{f}$. Если все главные миноры матрицы $A = a_{ij}$ отличны от нуля, т. е.

$$a_{11} \neq 0, \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0, ..., \det(A) \neq 0,$$

то матрицу A можно представить в виде $A = LU$, где L — нижняя треугольная матрица с единичной диагональю; U — верхняя треугольная матрица с ненулевыми диагональными элементами.

Приведем рекуррентные формулы для определения треугольных матриц L и U:

$$u_{11} = a_{11};$$

$$u_{1j} = a_{1j},\ l_{j1} = \frac{a_{j1}}{u_{11}},\ j = 2,3,\dots,n;$$

$$u_{ii} = a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{ki},\ i = 2,3,\dots,n;$$

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj},\ l_{ji} = \frac{1}{u_{ii}}\left(a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{jk} u_{ki} \right),$$

$$i = 2,3,\dots,n,\ j = i+1, i+2,\dots,n.$$

Далее решаем две системы уравнений с треугольными матрицами:

$$Ly = f;\quad Ux = y.$$

Задание к лабораторной работе «Решение систем линейных алгебраических уравнений с помощью LU-разложения»

1. Решить СЛАУ аналитически LU-разложением (табл. 1.3.1).
2. Написать программу решения СЛАУ LU-разложением. Решить с ее помощью СЛАУ.
3. Оформить отчет о лабораторной работе:

а) теоретическая часть;

б) аналитическое решение системы;

в) текст программы;

г) результаты.

Таблица 1.3.1

Варианты (1–30) задания для решения СЛАУ $A\vec{x}=\vec{b}$ с четырьмя неизвестными в виде ($A \mid \vec{b}$) LU-разложением или методом квадратного корня

1	**2**	**3**
$\begin{array}{rrrr\|r} -10 & -10 & 7 & -6 & 1 \\ -10 & -5 & 3 & -4 & 44 \\ 7 & 3 & -7 & -3 & -21 \\ -6 & -4 & -3 & -2 & 73 \end{array}$	$\begin{array}{rrrr\|r} -9 & -5 & 8 & -3 & 93 \\ -5 & 5 & -4 & 3 & 1 \\ 8 & -4 & 6 & 4 & -70 \\ -3 & 3 & 4 & -4 & 29 \end{array}$	$\begin{array}{rrrr\|r} 6 & -5 & -1 & -8 & 158 \\ -5 & 7 & -5 & 5 & -100 \\ -1 & -5 & 9 & -1 & -20 \\ -8 & 5 & -1 & 7 & -146 \end{array}$
4	**5**	**6**
$\begin{array}{rrrr\|r} 9 & -6 & 3 & -5 & 101 \\ -6 & -9 & 5 & -1 & -91 \\ 3 & 5 & 7 & 0 & 14 \\ -5 & -1 & 0 & 1 & -58 \end{array}$	$\begin{array}{rrrr\|r} 4 & 9 & 5 & 4 & -70 \\ 9 & -7 & -8 & 8 & 150 \\ 5 & -8 & 5 & 1 & 12 \\ 4 & 8 & 1 & 7 & -23 \end{array}$	$\begin{array}{rrrr\|r} -5 & 7 & -7 & -5 & 58 \\ 7 & 0 & 9 & -7 & 11 \\ -7 & 9 & -7 & -5 & 54 \\ -5 & -7 & -5 & -7 & 76 \end{array}$
7	**8**	**9**
$\begin{array}{rrrr\|r} 2 & 4 & 4 & -9 & 21 \\ 4 & -9 & -9 & -8 & -2 \\ 4 & -9 & 5 & 6 & 40 \\ -9 & -8 & 6 & -3 & 25 \end{array}$	$\begin{array}{rrrr\|r} -4 & -4 & 3 & 3 & -26 \\ -4 & 8 & -4 & -1 & 36 \\ 3 & -4 & -5 & 5 & -3 \\ 3 & -1 & 5 & 4 & -11 \end{array}$	$\begin{array}{rrrr\|r} 1 & 7 & 3 & -8 & 41 \\ 7 & -1 & -2 & -8 & -107 \\ 3 & -2 & -9 & 0 & -97 \\ -8 & -8 & 0 & 3 & 17 \end{array}$
10	**11**	**12**
$\begin{array}{rrrr\|r} 8 & -5 & 4 & 4 & -161 \\ -5 & -1 & 3 & -7 & 82 \\ 4 & 3 & -6 & 8 & -53 \\ 4 & -7 & 8 & -3 & -100 \end{array}$	$\begin{array}{rrrr\|r} -8 & 7 & 1 & 3 & 14 \\ 7 & -8 & 3 & -10 & 52 \\ 1 & 3 & -4 & 8 & -74 \\ 3 & -10 & 8 & 0 & 72 \end{array}$	$\begin{array}{rrrr\|r} -3 & -1 & -9 & 7 & -35 \\ -1 & 5 & -7 & 8 & -62 \\ -9 & -7 & -1 & -8 & 46 \\ 7 & 8 & -8 & 7 & -103 \end{array}$
13	**14**	**15**
$\begin{array}{rrrr\|r} -8 & 2 & 8 & 0 & -10 \\ 2 & -4 & -2 & -6 & 46 \\ 8 & -2 & -7 & 3 & -17 \\ 0 & -6 & 3 & 9 & -99 \end{array}$	$\begin{array}{rrrr\|r} 4 & -8 & -6 & 7 & -19 \\ -8 & 4 & -2 & 9 & 47 \\ -6 & -2 & -7 & -10 & 117 \\ 7 & 9 & -10 & -7 & -46 \end{array}$	$\begin{array}{rrrr\|r} -9 & -1 & 0 & -1 & -68 \\ -1 & 3 & 6 & 1 & -28 \\ 0 & 6 & -5 & -3 & 28 \\ -1 & 1 & -3 & 1 & 13 \end{array}$
16	**17**	**18**
$\begin{array}{rrrr\|r} 1 & 7 & -3 & -3 & 67 \\ 7 & 2 & 5 & -1 & 11 \\ -3 & 5 & -6 & 3 & 82 \\ -3 & -1 & 3 & 6 & -14 \end{array}$	$\begin{array}{rrrr\|r} -5 & -5 & 4 & -1 & -19 \\ -5 & 9 & -7 & -10 & -3 \\ 4 & -7 & -6 & 7 & -96 \\ -1 & -10 & 7 & -4 & 26 \end{array}$	$\begin{array}{rrrr\|r} -3 & 6 & -10 & -6 & 24 \\ 6 & -9 & 0 & -2 & 13 \\ -10 & 0 & -10 & -7 & 75 \\ -6 & -2 & -7 & 4 & 10 \end{array}$

Окончание табл. 1.3.1

<table>
<tr><td>19</td><td>20</td><td>21</td></tr>
<tr>
<td>$\begin{array}{rrrr|r} -7 & -5 & -9 & 4 & -67 \\ -5 & -4 & 5 & 3 & -18 \\ -9 & 5 & 1 & 7 & 13 \\ 4 & 3 & 7 & -10 & 122 \end{array}$</td>
<td>$\begin{array}{rrrr|r} -7 & -7 & -2 & -2 & 34 \\ -7 & -8 & -10 & 0 & 33 \\ -2 & -10 & 5 & 1 & 62 \\ -2 & 0 & 1 & -6 & 39 \end{array}$</td>
<td>$\begin{array}{rrrr|r} -3 & 3 & -6 & 6 & 21 \\ 3 & 0 & -2 & -10 & -129 \\ -6 & -2 & 9 & -7 & 61 \\ 6 & -10 & -7 & -10 & -106 \end{array}$</td>
</tr>
<tr><td>22</td><td>23</td><td>24</td></tr>
<tr>
<td>$\begin{array}{rrrr|r} -8 & -6 & 5 & 9 & -17 \\ -6 & -1 & -10 & 1 & -73 \\ 5 & -10 & 6 & 8 & -13 \\ 9 & 1 & 8 & 0 & 76 \end{array}$</td>
<td>$\begin{array}{rrrr|r} 7 & 9 & 4 & 5 & 116 \\ 9 & -10 & -3 & -4 & -15 \\ 4 & -3 & -9 & 5 & 129 \\ 5 & -4 & 5 & -5 & -82 \end{array}$</td>
<td>$\begin{array}{rrrr|r} 8 & -1 & 3 & -3 & 137 \\ -1 & -2 & 4 & 3 & 13 \\ 3 & 4 & -4 & 2 & -61 \\ -3 & 3 & 2 & 0 & -33 \end{array}$</td>
</tr>
<tr><td>25</td><td>26</td><td>27</td></tr>
<tr>
<td>$\begin{array}{rrrr|r} 2 & -3 & 0 & 2 & 15 \\ -3 & 6 & 2 & 9 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & -15 \\ 2 & 9 & -1 & 9 & -46 \end{array}$</td>
<td>$\begin{array}{rrrr|r} 5 & -10 & 2 & 6 & -1 \\ -10 & -1 & -7 & 2 & -10 \\ 2 & -7 & -9 & 9 & 64 \\ 6 & 2 & 9 & 5 & -82 \end{array}$</td>
<td>$\begin{array}{rrrr|r} 1 & 7 & -9 & -1 & -33 \\ 7 & 8 & 7 & 7 & -32 \\ -9 & 7 & 4 & 9 & 45 \\ -1 & 7 & 9 & -6 & 124 \end{array}$</td>
</tr>
<tr><td>28</td><td>29</td><td>30</td></tr>
<tr>
<td>$\begin{array}{rrrr|r} -10 & 6 & 1 & -1 & -85 \\ 6 & -2 & -8 & 5 & 40 \\ 1 & -8 & 7 & -9 & 64 \\ -1 & 5 & -9 & 1 & -28 \end{array}$</td>
<td>$\begin{array}{rrrr|r} -4 & -1 & 8 & 4 & -71 \\ -1 & -2 & -9 & 6 & -33 \\ 8 & -9 & -5 & -10 & 53 \\ 4 & 6 & -10 & -4 & 110 \end{array}$</td>
<td>$\begin{array}{rrrr|r} -2 & -3 & 3 & -2 & 12 \\ -3 & 2 & 5 & 6 & 14 \\ 3 & 5 & -1 & 0 & -40 \\ -2 & 6 & 0 & 2 & -20 \end{array}$</td>
</tr>
</table>

1.4. Решение систем линейных алгебраических уравнений методом квадратного корня

Метод квадратного корня по содержанию близок к LU-разложению. Основное отличие состоит в том, что метод квадратного корня дает упрощение для симметричных матриц.

Рассмотрим систему уравнений $A\vec{x} = \vec{f}$. Пусть все главные миноры матрицы $A = a_{ij}$ отличны от нуля, т. е.

$$a_{11} \neq 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0, \ldots, \det(A) \neq 0.$$

Метод квадратного корня основан на разложении матрицы A в произведение

$$A = S^{\text{т}} D S,$$

где S — верхняя треугольная матрица с положительными элементами на главной диагонали, $S^{\text{т}}$ — транспонированная к ней матрица; D — диагональная матрица с элементами $d_{ii} = \pm 1$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Пусть $A(n \times n)$. Тогда

$$(S^{\text{т}} D S)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} s_{ik}^{\text{т}} d_{kk} s_{kj}.$$

Отсюда

$$\sum_{k=1}^{n} s_{ik}^{\text{т}} d_{kk} s_{kj} = a_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n. \tag{1.4.1}$$

Так как матрица A симметричная, не ограничивая общности, будем считать, что выполняется неравенство $i \le j$. Тогда (1.4.1) можно переписать в виде

$$\sum_{k=1}^{i-1} s_{ik}^{\text{т}} d_{kk} s_{kj} + s_{ii} d_{ii} s_{ij} + \sum_{k=i+1}^{n} s_{ik}^{\text{т}} d_{kk} s_{kj} = a_{ij},$$

При этом

$$s_{ik}^{\text{т}} = s_{ki} = 0, i < k.$$

Получаем систему уравнений

$$s_{ii} d_{ii} s_{ij} + \sum_{k=1}^{i-1} s_{ik}^{\text{т}} d_{kk} s_{kj} = a_{ij}, \quad i \le j.$$

В частности, при $i = j$

$$|s_{ii}|^2 d_{ii} = a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} |s_{ki}|^2 d_{kk},$$

$$d_{ii} = \operatorname{sign}\left(a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} |s_{ki}|^2 d_{kk} \right),$$

$$s_{ii} = \left(\left| a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} |s_{ki}|^2 d_{kk} \right| \right)^{1/2}. \qquad (1.4.2)$$

При $i < j$ получим

$$s_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} s_{ki} s_{kj} d_{kk}}{s_{ii} d_{ii}}. \qquad (1.4.3)$$

По формулам (1.4.2) и (1.4.3) находим рекуррентно все ненулевые элементы матрицы S. Запишем порядок вычисления матричных элементов матриц S и D:

$$\begin{aligned}
&d_{11}, s_{11}, s_{12}, s_{13}, \ldots, s_{1n}, \\
&d_{22}, s_{22}, s_{23}, s_{24}, \ldots, s_{2n}, \\
&\ldots \\
&d_{nn}, s_{nn}.
\end{aligned}$$

Обратный ход метода квадратного корня состоит в последовательном решении двух систем уравнений с треугольными матрицами:

$$S^{\mathrm{T}} \vec{y} = \vec{f}, \quad DS\vec{x} = \vec{y}.$$

Решения этих систем находим по рекуррентным формулам

$$\begin{cases} y_1 = f_1 / s_{11}, \\ y_i = \dfrac{f_i - \sum_{k=1}^{i-1} s_{ki} y_k}{s_{ii}}, \quad i = 2, 3, \ldots, n; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_n = d_{nn} y_n / s_{nn}, \\ x_i = \dfrac{d_{ii} y_i - \sum_{k=i+1}^{n} s_{ik} x_k}{s_{ii}}, \quad i = n-1, n-2, \ldots, 1. \end{cases}$$

Всего метод квадратного корня при факторизации $A = S^{\mathrm{T}}DS$ требует примерно $n^3/6$ операций умножения и деления и n операций извлечения квадратного корня.

Задание к лабораторной работе «Решение систем линейных алгебраических уравнений методом квадратного корня»

1. Решить СЛАУ аналитически методом квадратного корня (см. табл. 1.3.1 на с. 22–23).
2. Написать программу решения СЛАУ методом квадратного корня. Решить с ее помощью СЛАУ.
3. Найти меру обусловленности симметричной матрицы коэффициентов A, используя степенной метод для нахождения наибольших по модулю собственных значений матриц A и A^{-1}.
4. Оформить отчет о лабораторной работе:

а) теоретическая часть;
б) аналитическое решение системы методом квадратного корня;
в) текст программы;
г) результаты.

1.5. Решение систем линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей методом прогонки

Рассмотрим СЛАУ вида

$$a_i y_{i-1} + b_i y_i + c_i y_{i+1} = f_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1; \tag{1.5.1а}$$

$$y_0 = \kappa_1 y_1 + \mu_1; \;\; y_n = \kappa_2 y_{n-1} + \mu_2, \tag{1.5.1б}$$

где $\vec{Y} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \ldots \\ y_n \end{bmatrix}$ — вектор решений.

В матричном виде СЛАУ можно записать так:

$$\begin{pmatrix} 1 & -\kappa_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & b_1 & c_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & b_2 & c_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & & \dots & & & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\kappa_2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_{n-1} \\ \mu_2 \end{pmatrix}.$$

Решение системы (1.5.1) ищем в виде

$$y_i = \alpha_{i+1} y_{i+1} + \beta_{i+1}. \qquad (1.5.2)$$

Из (1.5.2) следует

$$y_{i-1} = \alpha_i y_i + \beta_i. \qquad (1.5.3)$$

Подставим (1.5.3) в (1.5.1а):

$$a_i(\alpha_i y_i + \beta_i) + b_i y_i + c_i y_{i+1} = f_i, \quad i = 1, 2, ..., n-1.$$

Отсюда

$$y_i = -\frac{c_i}{a_i\alpha_i + b_i} y_{i+1} + \frac{f_i - a_i\beta_i}{a_i\alpha_i + b_i}. \qquad (1.5.4)$$

Сравнив (1.5.2) и (1.5.4), получим

$$\left[\begin{aligned} &\alpha_{i+1} = -\frac{c_i}{a_i\alpha_i + b_i}, \\ &\beta_{i+1} = \frac{f_i - a_i\beta_i}{a_i\alpha_i + b_i}, \; i = 1, ..., n-1. \end{aligned}\right.$$

Из (1.5.1б) следует $\alpha_1 = \kappa_1$; $\beta_1 = \mu_1$. Из (1.5.2) при $i = n - 1$

$$y_{n-1} = \alpha_n y_n + \beta_n. \qquad (1.5.5)$$

Подставим (1.5.5) в (1.5.1б) и получим

$$y_n = \frac{\kappa_2\beta_n + \mu_2}{1 - \kappa_2\alpha_n}. \qquad (1.5.6)$$

Запишем формулы в порядке их применения:

а) прямой ход метода прогонки:

$$\alpha_1 = \kappa_1; \ \ \beta_1 = \mu_1;$$

$$\alpha_{i+1} = -\frac{c_i}{a_i\alpha_i + b_i};$$

$$\beta_{i+1} = \frac{f_i - a_i\beta_i}{a_i\alpha_i + b_i}, \ \ i = 1, ..., n-1.$$

б) обратный ход метода прогонки:

$$y_n = \frac{\kappa_2\beta_n + \mu_2}{1 - \kappa_2\alpha_n};$$

$$y_i = \alpha_{i+1}y_{i+1} + \beta_{i+1}, \quad i = n-1, n-2, \ldots, 0.$$

Достаточные условия применимости метода прогонки:

$$|b_i| \ge |a_i| + |c_i|, \ \ (|\kappa_1| \le 1 \text{ и } |\kappa_2| < 1) \text{ или } (|\kappa_1| < 1 \text{ и } |\kappa_2| \le 1).$$

Пример. Пусть коэффициенты СЛАУ образуют матрицу:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 15 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Свободные члены:

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 38 \\ 11 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\alpha_1 = 1; \ \ \beta_1 = -2;$$

$$\alpha_2 = -\frac{c_1}{a_1\alpha_1 + b_1} = \frac{2}{1+15} = \frac{1}{8};$$

$$\beta_2 = \frac{f_1 - a_1\beta_1}{a_1\alpha_1 + b_1} = \frac{38+2}{1+15} = \frac{5}{2};$$

$$\beta_3 = \frac{f_2 - a_2\beta_2}{a_2\alpha_2 + b_2} = \frac{11+2{,}5}{-0{,}125+3} = \frac{108}{23};$$

$$\alpha_3 = -\frac{c_2}{a_2\alpha_2 + b_2} = -\frac{1}{-0{,}125+3} = -\frac{8}{23};$$

$$y_3 = \frac{\kappa_2\beta_3 + \mu_2}{1 - \kappa_2\alpha_3} = \frac{-1\cdot(108/23)+6}{1-8/23} = 2;$$

$$y_2 = \alpha_3 y_3 + \beta_3 = -\frac{8}{23}\cdot 2 + \frac{108}{23} = 4;$$

$$y_1 = \frac{1}{8}\cdot 4 + 2{,}5 = 3;$$

$$y_0 = 3 - 2 = 1.$$

Задание к лабораторной работе «Решение СЛАУ с трехдиагональной матрицей методом прогонки»

1. Решить СЛАУ с трехдиагональной матрицей аналитически методом прогонки (табл. 1.5.1).

2. Написать программу решения СЛАУ методом прогонки. Решить с ее помощью СЛАУ из своего варианта.

3. Оформить отчет о лабораторной работе:

а) теоретическая часть;

б) аналитическое решение системы методом прогонки;

в) текст программы;

г) результаты.

Таблица 1.5.1

Варианты (1–30) СЛАУ с трехдиагональной матрицей

<table>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr>
<td>$\begin{array}{rrrr|r} 1 & 4 & 0 & 0 & -11 \\ -10 & -10 & 7 & 0 & -13 \\ 0 & -6 & -5 & 3 & 54 \\ 0 & 0 & 7 & 1 & -64 \end{array}$</td>
<td>$\begin{array}{rrrr|r} 1 & -5 & 0 & 0 & -27 \\ -9 & 6 & -9 & 0 & -27 \\ 0 & -5 & 8 & -3 & 14 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 12 \end{array}$</td>
<td>$\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ -7 & -4 & -1 & 0 & -34 \\ 0 & -6 & 6 & -5 & 15 \\ 0 & 0 & 8 & 1 & 49 \end{array}$</td>
</tr>
<tr><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr>
<tr>
<td>$\begin{array}{rrrr|r} 1 & -9 & 0 & 0 & 63 \\ 5 & 4 & 1 & 0 & 24 \\ 0 & -6 & 3 & 1 & 40 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -11 \end{array}$</td>
<td>$\begin{array}{rrrr|r} 1 & -9 & 0 & 0 & 86 \\ -9 & 5 & -1 & 0 & -18 \\ 0 & 7 & 0 & 1 & -61 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & -3 \end{array}$</td>
<td>$\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 0 & 0 & 8 \\ 5 & 4 & -7 & 0 & 58 \\ 0 & -8 & 8 & 5 & -22 \\ 0 & 0 & -7 & 1 & 65 \end{array}$</td>
</tr>
<tr><td>7</td><td>8</td><td>9</td></tr>
<tr>
<td>$\begin{array}{rrrr|r} 1 & 9 & 0 & 0 & 37 \\ -5 & -7 & 2 & 0 & 17 \\ 0 & 4 & 4 & -9 & 71 \\ 0 & 0 & 9 & 1 & 51 \end{array}$</td>
<td>$\begin{array}{rrrr|r} 1 & -6 & 0 & 0 & 45 \\ 2 & -2 & 4 & 0 & -36 \\ 0 & -1 & -4 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 8 & 1 & -79 \end{array}$</td>
<td>$\begin{array}{rrrr|r} 1 & 4 & 0 & 0 & 15 \\ 3 & -6 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -5 & -3 & 6 & -63 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 28 \end{array}$</td>
</tr>
<tr><td>10</td><td>11</td><td>12</td></tr>
<tr>
<td>$\begin{array}{rrrr|r} 1 & 9 & 0 & 0 & 33 \\ -1 & -2 & -8 & 0 & -76 \\ 0 & -9 & 0 & 3 & -42 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & -69 \end{array}$</td>
<td>$\begin{array}{rrrr|r} 1 & -8 & 0 & 0 & -80 \\ 4 & 4 & -1 & 0 & 8 \\ 0 & 3 & -7 & -6 & 109 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -21 \end{array}$</td>
<td>$\begin{array}{rrrr|r} 1 & 10 & 0 & 0 & 8 \\ -8 & 7 & 1 & 0 & -68 \\ 0 & 3 & -8 & 3 & 26 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & -18 \end{array}$</td>
</tr>
<tr><td>13</td><td>14</td><td>15</td></tr>
<tr>
<td>$\begin{array}{rrrr|r} 1 & -5 & 0 & 0 & 13 \\ 8 & -4 & -3 & 0 & 92 \\ 0 & -1 & -9 & 7 & 122 \\ 0 & 0 & 7 & 1 & -49 \end{array}$</td>
<td>$\begin{array}{rrrr|r} 1 & 3 & 0 & 0 & -12 \\ 9 & -7 & -10 & 0 & -74 \\ 0 & -7 & -10 & -3 & 10 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -1 \end{array}$</td>
<td>$\begin{array}{rrrr|r} 1 & -7 & 0 & 0 & -26 \\ 3 & 6 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -5 & -3 & 1 & -11 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 5 \end{array}$</td>
</tr>
<tr><td>16</td><td>17</td><td>18</td></tr>
<tr>
<td>$\begin{array}{rrrr|r} 1 & -3 & 0 & 0 & -19 \\ -3 & -3 & 2 & 0 & -53 \\ 0 & 5 & -1 & -6 & 17 \\ 0 & 0 & -6 & 1 & 47 \end{array}$</td>
<td>$\begin{array}{rrrr|r} 1 & 10 & 0 & 0 & -33 \\ -5 & -5 & 4 & 0 & 13 \\ 0 & -1 & 9 & -7 & 32 \\ 0 & 0 & 6 & 1 & 47 \end{array}$</td>
<td>$\begin{array}{rrrr|r} 1 & 9 & 0 & 0 & 41 \\ -4 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & -7 & -5 & -51 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & -11 \end{array}$</td>
</tr>
<tr><td>19</td><td>20</td><td>21</td></tr>
<tr>
<td>$\begin{array}{rrrr|r} 1 & -3 & 0 & 0 & 39 \\ 0 & 2 & -4 & 0 & -4 \\ 0 & -6 & -2 & 4 & 96 \\ 0 & 0 & 7 & 1 & -21 \end{array}$</td>
<td>$\begin{array}{rrrr|r} 1 & 8 & 0 & 0 & -57 \\ -1 & 0 & 7 & 0 & -27 \\ 0 & 3 & -2 & 1 & -11 \\ 0 & 0 & -9 & 1 & 38 \end{array}$</td>
<td>$\begin{array}{rrrr|r} 1 & -3 & 0 & 0 & 28 \\ 6 & -1 & -8 & 0 & 105 \\ 0 & -1 & -8 & -4 & 47 \\ 0 & 0 & -6 & 1 & 46 \end{array}$</td>
</tr>
</table>

Окончание табл. 1.5.1

<table>
<tr><td>22</td><td>23</td><td>24</td></tr>
<tr>
<td>$\begin{array}{rrrr|r} 1 & 7 & 0 & 0 & -16 \\ 7 & -10 & -5 & 0 & 46 \\ 0 & 7 & 3 & -10 & 62 \\ 0 & 0 & 7 & 1 & -66 \end{array}$</td>
<td>$\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & -6 & 7 & -9 & -114 \\ 0 & 0 & 9 & 1 & -48 \end{array}$</td>
<td>$\begin{array}{rrrr|r} 1 & 9 & 0 & 0 & 87 \\ 0 & -2 & -10 & 0 & 62 \\ 0 & 9 & -7 & -10 & 197 \\ 0 & 0 & 8 & 1 & -70 \end{array}$</td>
</tr>
<tr><td>25</td><td>26</td><td>27</td></tr>
<tr>
<td>$\begin{array}{rrrr|r} 1 & 4 & 0 & 0 & -15 \\ 7 & 9 & 4 & 0 & 18 \\ 0 & 5 & -10 & -3 & -119 \\ 0 & 0 & 9 & 1 & 71 \end{array}$</td>
<td>$\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 0 & 0 & -5 \\ -10 & 7 & 8 & 0 & -42 \\ 0 & -1 & 3 & -3 & 10 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & -8 \end{array}$</td>
<td>$\begin{array}{rrrr|r} 1 & -5 & 0 & 0 & -28 \\ -1 & 9 & -6 & 0 & 58 \\ 0 & -7 & -2 & 3 & -61 \\ 0 & 0 & 10 & 1 & -17 \end{array}$</td>
</tr>
<tr><td>28</td><td>29</td><td>30</td></tr>
<tr>
<td>$\begin{array}{rrrr|r} 1 & 10 & 0 & 0 & 71 \\ 2 & -9 & 9 & 0 & -142 \\ 0 & 5 & 7 & -2 & -26 \\ 0 & 0 & 6 & 1 & -55 \end{array}$</td>
<td>$\begin{array}{rrrr|r} 1 & 7 & 0 & 0 & -43 \\ 8 & 7 & 7 & 0 & -71 \\ 0 & 4 & 9 & -6 & -154 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 36 \end{array}$</td>
<td>$\begin{array}{rrrr|r} 1 & 9 & 0 & 0 & -49 \\ 1 & -1 & -2 & 0 & 13 \\ 0 & -8 & 5 & 7 & 29 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \end{array}$</td>
</tr>
</table>

1.6. Численные методы решения систем нелинейных уравнений

Метод последовательных приближений

Рассмотрим уравнение вида

$$x = \varphi(x).$$

Построим графики функций обоих частей уравнения (рис. 1.6.1).

Решением уравнения является абсцисса x^* точки пересечения графика функции $\varphi(x)$ и биссектрисы $y = x$. Точек пересечения x^* может быть несколько. Допустим, что для точного решения x^* каким-либо способом указано начальное приближение x^0. В простейшем методе итераций все дальнейшие итерации строятся по формуле:

$$x^{n+1} = \varphi(x^n), n = 0, 1, 2, \dots .$$

Этот процесс называется простой одношаговой итерацией (см. рис. 1.6.1).

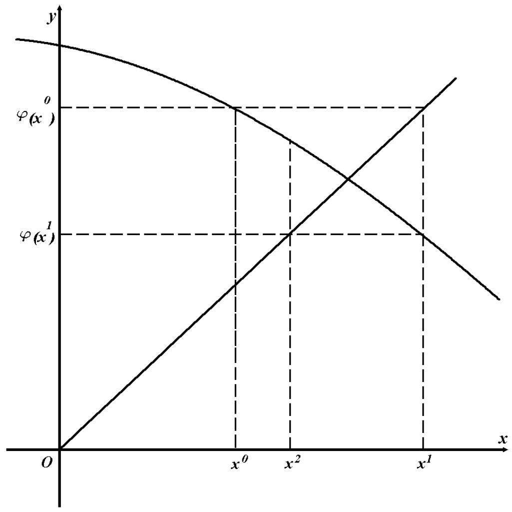

Рис. 1.6.1. Иллюстрация метода последовательных приближений

Выясним поведение приближений x^n, когда они находятся вблизи решения x^*. Удобнее иметь дело не с приближениями x^n, а с их погрешностями $\varepsilon_n = x^* - x^n$, так как это дает право воспользоваться малостью ε_n:

$$x^{n+1} = x^* - \varepsilon_{n+1} = \varphi(x^n) = \varphi(x^* - \varepsilon_{n+1}) = \varphi(x^*) - \varphi'(x^*) + 0(\varepsilon_n).$$

Следовательно, $\varepsilon_{n+1} \approx \varepsilon_n \varphi'(x^n)$.

Рассмотрим три случая.

1. При $\left|\varphi'(x^*)\right| > 1$ погрешность ε_{n+1} по абсолютному значению больше погрешности ε_n, и приближение x^{n+1} будет отстоять от точного решения x^* дальше, чем результат x^n. Решение x^* будет «точкой отталкивания» для приближений, близких к x^*, и в этом случае не будет сходимости приближения x^n к точному решению x^*.

2. Если $\left|\varphi'(x^*)\right| < 1$, то $\left|\varepsilon_{n+1}\right| < \left|\varepsilon_n\right|$, поэтому при начальном приближении x^0, достаточно близком к x^*, x^n сходится к точному решению x^* примерно со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем $q = \varphi'(x^*)$. При $\varphi'(x^*) > 0$ погрешности ε_{n+1} и ε_n бу-

дут иметь одинаковые знаки и сходимость будет монотонной. Когда же $\varphi'(x^*) < 0$, погрешности ε_{n+1} и ε_n имеют разные знаки и приближение x^n будет сходиться к точному решению x^*, колеблясь около x^*. Интервал колебаний часто позволяет оценить точность вычислений.

3. При $\varphi'(x^*) = 0$ погрешность $\varepsilon_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ со скоростью, превосходящей сходимость геометрической погрешности со сколь угодно малым знаменателем.

Для решения системы уравнений методом итераций преобразуем ее к виду $\vec{x} = \vec{\Phi}(\vec{x})$, или

$$\begin{aligned} x_1 &= \Phi_1(x_1, ..., x_m); \\ x_2 &= \Phi_2(x_1, ..., x_m); \\ &\dots \\ x_m &= \Phi_m(x_1, ..., x_m). \end{aligned}$$

При этом итерации проводят по формуле

$$\vec{x}^{n+1} = \vec{\Phi}(\vec{x}^n),$$

или

$$x_i^{n+1} = \Phi_i(x_1^n, x_2^n, ..., x_m^n), \ i = 1, 2, ..., m.$$

Перейдем к изучению метода с более общих позиций.

Определение. Пусть X — полное нормированное пространство (т. е. пространство, в котором сходится любая фундаментальная последовательность), например R^n, а оператор $y = \Phi(x)$ отображает X в себя. Если при некотором значении $0 \le q < 1$ при всех значениях x_1, $x_2 \subset X$

$$\|\Phi(x_1) - \Phi(x_2)\| \le q\|x_1 - x_2\|,$$

то такое отображение называется сжимающим.

Теорема (принцип сжимающих отображений). Если отображение $y = \Phi(x)$ сжимающее, то уравнение $y = \Phi(x)$ имеет единственное решение x^* и

$$\left\| x^* - x^k \right\| \le \frac{q^k}{1-q} \left\| x^1 - x^0 \right\|.$$

Доказательство. Из определения имеем

$$\left\| x^{n+1} - x^n \right\| = \left\| \Phi(x^n) - \Phi(x^{n-1}) \right\| \le q \left\| x^n - x^{n-1} \right\|,$$

следовательно,

$$\left\| x^{n+1} - x^n \right\| \le q^n \left\| x^1 - x^0 \right\| = q^n a.$$

Пусть $l > n.$ Тогда из свойств нормированного пространства имеем

$$\left\| x^l - x^n \right\| \le \left\| x^l - x^{l-1} \right\| + \ldots + \left\| x^{n+1} - x^n \right\| \le q^{l-1} a + \ldots + q^n a \le q^n a \sum_{l=0}^{\infty} q^l = \frac{q^n}{1-q} a.$$

Таким образом, последовательность x^n фундаментальна. Покажем единственность неподвижной точки. Допустим, что их две: x^* и y^*. Тогда

$$\left\| x^* - y^* \right\| = \left\| \Phi(x^*) - \Phi(y^*) \right\| \le q \left\| x^* - y^* \right\|,$$

т. е. пришли к противоречию.

Замечание. Сжимаемость оператора Φ необходима лишь в некоторой окрестности точки x^*. В достаточно малой окрестности решения $\vec{x}^* \in R^m$ системы для приближения методом простых итераций имеем

$$\vec{x}^{n+1} - \vec{x}^* = \overrightarrow{\Phi}(\vec{x}^n) - \overrightarrow{\Phi}(\vec{x}^*) \approx \Phi'(\vec{x}^*)(\vec{x}^n - \vec{x}^*),$$

где

$$\Phi'(\vec{x}^*) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_m} \\ \vdots \\ \frac{\partial \Phi_m}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial \Phi_m}{\partial x_m} \end{pmatrix}$$

— матрица Якоби.

Следовательно, если $\left\|\Phi'(\vec{x}^*)\right\| < 1,$ то можно ожидать сходимости итерационного процесса при условии, что итерации $\vec{x}^n$ не очень далеки от точного решения.

Метод Ньютона

Если известно довольно хорошее начальное приближение к точному решению $\vec{x}^*$ системы уравнений

$$\vec{F}(\vec{x}) = 0,$$

то эффективным методом повышения точности численного решения является метод Ньютона. Идея метода Ньютона заключается в том, что в окрестности имеющегося приближения $\vec{x}^n$ задачу заменяют некоторой вспомогательной линейной задачей.

Рассмотрим уравнение $f(x) = 0$:

$$f(x) \approx f(x^n) + f'(x^n)(x - x^n) = 0.$$

Его решение

$$x = x^n - \frac{f(x^n)}{f'(x^n)}$$

принимают за следующее приближение, т. е.

$$x^{n+1} = x^n - \frac{f(x^n)}{f'(x^n)}.$$

Для пояснения итерационного процесса запишем уравнение касательной к функции $f(x)$ в точке x^0:

$$y - f(x^0) = f'(x^0)(x - x^0).$$

Если положить $y = 0$, то получим

$$x = x^0 - \frac{f(x^0)}{f'(x^0)},$$

поэтому метод Ньютона называют еще методом касательных.

Рассмотрим общий случай. Пусть отображение $\vec{F}: R^m \to R^m$. Тогда

$$\vec{x}^{n+1} = \vec{x}^n - \left[F'(\vec{x}^n)\right]^{-1} \vec{F}(\vec{x}^n).$$

Пусть $\Omega_a = \left\{\vec{x} : \left\|\vec{x} - \vec{x}^*\right\| < a\right\}$. И пусть при некоторых значениях a, a_1, a_2, $a > 0$, $a_1 \geq 0$, $a_2 < \infty$ выполнены условия:

1) $\left\|\left[F'(\vec{x})\right]^{-1}\right\| \leq a_1$ при $\vec{x} \in \Omega_a$;

2) $\left\|\vec{F}(\vec{u}_1) - \vec{F}(\vec{u}_2) - F'(\vec{u}_2)(\vec{u}_1 - \vec{u}_2)\right\| \leq a_2 \left\|\vec{u}_2 - \vec{u}_1\right\|^2$ при $\vec{u}_1, \vec{u}_2 \in \Omega_a \subset R^n$.

Обозначим $c = a_1 a_2$, $b = \min(a, c^{-1})$.

Условие 2 автоматически выполняется, если функции имеют ограниченные вторые производные, так как по формуле Тейлора

$$F_i(\vec{y}) = F_i(\vec{x}) + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial F_i(x_1 \ldots x_m)}{\partial x_j}(y_j - x_j) + O\left(\left\|\vec{y} - \vec{x}\right\|^2\right).$$

Теорема (о сходимости метода Ньютона). При выполнении условий 1, 2 и $\vec{x} \in \Omega_b$ итерационный процесс Ньютона вида

$$\vec{x}^{n+1} = \vec{x}^n - \left[F'(\vec{x}^n)\right]^{-1} \cdot \vec{F}(\vec{x}^n)$$

сходится с оценкой погрешности

$$\left\|\vec{x}^n - \vec{x}^*\right\| \leq c^{-1}\left(c\left\|\vec{x}^0 - \vec{x}^*\right\|\right)^{2^n}.$$

Доказательство. Пусть начальное приближение $\vec{x}^0 \in \Omega_b$. Покажем, что если итерация $\vec{x}^n \in \Omega_b$, то и итерация $\vec{x}^{n+1} \in \Omega_b$. Пусть $\vec{u}_1 = \vec{x}^*$, $\vec{u}_2 = \vec{x}^n$. Тогда

$$\left\|\vec{F}(\vec{x}^*) - \vec{F}(\vec{x}^n) - F'(\vec{x}^n)(\vec{x}^* - \vec{x}^n)\right\| \leq a_2 \left\|\vec{x}^n - \vec{x}^*\right\|^2.$$

Поскольку $F(\vec{x}^n) = -F'(\vec{x}^n)(\vec{x}^{n+1} - \vec{x}^n)$, $F(\vec{x}^*) = 0$, то

$$\left\| F'(\vec{x}^n)(\vec{x}^{n+1} - \vec{x}^*) \right\| \le a_2 \left\| \vec{x}^n - \vec{x}^* \right\|^2 .$$

Следовательно, имеем

$$\left\| \vec{x}^{n+1} - \vec{x}^* \right\| \le \left\| \left[F'(\vec{x}^n) \right]^{-1} \cdot F'(\vec{x}^n)(\vec{x}^{n+1} - \vec{x}^*) \right\| \le$$

$$\le \left\| \left[F'(\vec{x}^n) \right]^{-1} \right\| \cdot \left\| F'(\vec{x}^n)(\vec{x}^{n+1} - \vec{x}^*) \right\| \le a_1 a_2 \left\| \vec{x}^n - \vec{x}^* \right\|^2 =$$

$$= c \left\| \vec{x}^n - \vec{x}^* \right\|^2 . \quad (1.6.1)$$

Отсюда

$$\left\| \vec{x}^{n+1} - \vec{x}^* \right\| \le cb^2 = (cb)b \le b,$$

так как $cb < 1$, поэтому $\vec{x}^{n+1} \in \Omega_b$. Получаем, что все итерации $\vec{x}^n \in \Omega_b$, так как $\vec{x}^0 \in \Omega_b$.

Пусть $q_n = c \left\| \vec{x}^n - \vec{x}^* \right\|$. После умножения на c неравенство (1.6.1) примет вид

$$q_{n+1} \le q_n^2 .$$

Следовательно, $q_n \le (q_0)^{2^n}$ и

$$c \left\| \vec{x}^n - \vec{x}^* \right\| \le \left(c \left\| \vec{x}^0 - \vec{x}^* \right\| \right)^{2^n} .$$

Теорема доказана.

Мы видим, что итерации сходятся с квадратичной скоростью. Это придает методу Ньютона особую ценность.

Покажем, как избежать обращения матрицы при использовании метода Ньютона:

$$F'(\vec{x}^n) = (\vec{x}^{n+1} - \vec{x}^n) = -\vec{F}(\vec{x}^n);$$

$$\vec{z}^{n+1} = \vec{x}^{n+1} - \vec{x}^n;$$

$$F'(\vec{x}^n)\vec{z}^n = -\vec{F}(\vec{x}^n);$$

$$\vec{x}^{n+1} = \vec{x}^n + \vec{z}^n .$$

Таким образом, метод Ньютона сведен к решению системы линейных уравнений на каждом шаге итераций.

Пример. Пусть

$$F_1(x_1, x_2) = x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2} - 1;$$
$$F_2(x_1, x_2) = x_1^{\ 2} - x_2;$$
$$x_1^0 = 0,5;$$
$$x_2^0 = 0,5.$$

Имеем

$$F'(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ 2x_1 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\left(F'(\vec{x})\right)^{-1} = \frac{1}{-2x_1 - 4x_1x_2}\begin{pmatrix} -1 & -2x_2 \\ -2x_1 & 2x_1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} x_1^{n+1} \\ x_2^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^n \\ x_2^n \end{pmatrix} - \frac{1}{-2x_1 - 4x_1x_2}\begin{pmatrix} -1 & -2x_2^n \\ -2x_1^n & 2x_1^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (x_1^n)^2 + (x_2^n)^2 - 1 \\ (x_1^n)^2 - (x_2^n) \end{pmatrix}.$$

Модифицированный метод Ньютона

При использовании модифицированного метода Ньютона по ходу вычислений выбирают или заранее задают некоторую последовательность чисел: $n_0 = 0,\ n_1,\ n_2,\ \ldots$ При $n_k \le n < n_{k+1}$ итерации производят по формуле

$$\vec{x}^{n+1} = \vec{x}^n - \left(F'(\vec{x}^{n_k})\right)^{-1} \vec{F}(\vec{x}^n).$$

Увеличение числа итераций, сопровождающее такую модификацию, компенсируется большей «дешевизной» одного шага итерации.

Метод секущих

Для решения одного скалярного уравнения $f(x) = 0$ наряду с методом Ньютона применяют метод секущих. Простейший вариант этого метода заключается в следующем. В процессе итераций фиксируют некоторую точку x^0. Приближение x^{n+1} находят как абсциссу точки пересечения прямой, проходящей через точки $(x^0, f(x^0)), (x^n, f(x^n)),$ с осью Ox. При этом

$$x^{n+1} = x^n - \frac{f(x^n)(x^n - x^0)}{f(x^n) - f(x^0)}.$$

Более эффективен способ, где за приближение x^{n+1} принимают абсциссу точки пересечения с осью Ox прямой, проходящей через точки $(x^{n-1}, f(x^{n-1})),\ (x^n, f(x^n)),$ при этом

$$x^{n+1} = x^n - \frac{f(x^n)(x^n - x^{n-1})}{f(x^n) - f(x^{n-1})}.$$

Задание к лабораторной работе «Численные методы решения систем нелинейных уравнений»

1. Решить аналитически систему уравнений.
2. Решить графически систему уравнений (варианты 1–22 в табл. 1.6.1) с помощью программы построения графиков функций.
3. Написать программу решения системы уравнений методом Ньютона. В качестве начального приближения взять результаты графического решения. Сравнить результаты аналитического и графического решений.
4. Оформить отчет о лабораторной работе:

1) теоретическая часть;
2) графическое решение системы нелинейных уравнений;
3) текст программы;
4) результаты.

Таблица 1.6.1

Варианты (1–30) систем нелинейных уравнений

1	**2**
$x^2+y^2-4=0,$ $x-y^2-1=0$	$x^2+y^2-4=0,$ $x^2-y-1=0$
3	**4**
$(x^2+y^2)^2-4(x^2-y^2)=0,$ $x^2+y^2-1=0$	$x+y+xy-7=0,$ $x^2+y^2+xy-13=0$
5	**6**
$3x^2+5xy-2y^2-20=0,$ $x^2+xy+y^2-7=0$	$2x^2+xy-y^2-20=0,$ $x^2-4xy+7y^2-13=0$
7	**8**
$x^2-y^2+3y=0,$ $x^2+3xy+2y^2+2x+4y=0$	$(x+y)(x^2-y^2)-16=0,$ $(x-y)(x^2+y^2)-40=0$
9	**10**
$(x+y)(x+2y)(x+3y)-60=0,$ $(y+x)(y+2x)(y+3x)-105=0$	$x^4+6x^2y^2+y^4-136=0,$ $x^3y+xy^3-30=0$
11	**12**
$10x^2+5y^2-2xy-38x-6y+41=0,$ $3x^2-2y^2+5xy-17x-6y+20=0$	$x^3+y^3-19=0,$ $(xy+8)(x+y)-2=0$
13	**14**
$x^2y^2-2x+y^2=0,$ $2x^2-4x+3+y^3=0$	$x^3+x^3y^3+y^3-17=0,$ $x+xy+y-5=0$
15	**16**
$(x^2+y^2)(x+y)-15xy=0,$ $(x^4+y^4)(x^2+y^2)-85x^2y^2=0$	$\sqrt{-1-x}-\sqrt{2y-x}-1=0,$ $\sqrt{1-2y}+\sqrt{2y-x}-4=0$
17	**18**
$\log_y x-2\log_x y-1=0,$ $x^2+2y^2-3=0$	$2^{2x}-3^y+17=0,$ $2^x-3^{y/2}+1=0$

Окончание табл. 1.6.1

19	**20**
$\cos(x-y)-2\cos(x+y)=0,$ $\cos x\cos y-0,75=0$	$\log_x y+\log_y x-\frac{5}{2}=0,$ $4\sqrt{x}-3\sqrt{y}-1=0$
21	**22**
$\sin x-\sin 2y=0,$ $\cos x-\sin y=0$	$\sin x\cos y-\frac{\sqrt{3}}{4}=0,$ $\cos x\sin y-\frac{\sqrt{3}}{4}=0$
23	**24**
$x-2y+3z-9=0,$ $x^2+4y^2+9z^2-189=0,$ $3xz-4y^2=0$	$\mathrm{tg}\, x\,\mathrm{tg}\, z-3=0,$ $\mathrm{tg}\, y\,\mathrm{tg}\, z-6=0,$ $x+y+z-\pi=0$
25	**26**
$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}-3=0,$ $\frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}-3=0,$ $x+y+z-3=0$	$(x+y)^2-z^2-4=0,$ $(y+z)^2-x^2-2=0,$ $(z+x)^2-y^2-3=0$
27	**28**
$xy+yz-8=0,$ $yz+zx-9=0,$ $zx+xy-5=0$	$2x+y+z=0,$ $3x+2y+z=0,$ $3(x+2)^3+2(y+1)^3+(z+1)^3-27=0$
29	**30**
$x+y+z-2=0,$ $x^2+y^2+z^2-6=0,$ $x^3+y^3+z^3-8=0$	$x-y+z-6=0,$ $x^2+y^2+z^2-14=0,$ $x^3-y^3+z^3-36=0$

2. ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ

2.1. Интерполяционный многочлен Лагранжа

Определение. Интерполяцией называется приближенное или точное нахождение значений какой-либо величины по известным отдельным значениям этой величины или значениям других величин, связанных с данной.

Определение. Интерполяционным многочленом называется многочлен $L_n(x)$ степени n, принимающий значение y_i в узлах x_i, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ (рис. 2.1.1).

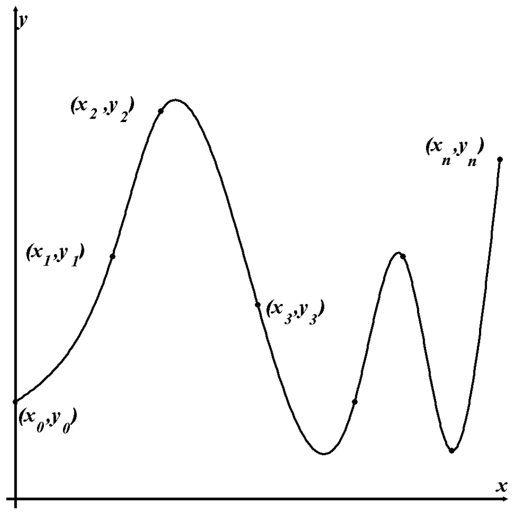

Рис. 2.1.1. Пример интерполяционного многочлена

Пример 1. Пусть $n = 1$. Интерполяционный многочлен проходит через точки (x_0, y_0), …, (x_1,y_1) и представляет собой прямую линию (рис. 2.1.2):

$$L_1(x) = y_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + y_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}; \quad L_1(x_0) = y_0; \quad L_1(x_1) = y_1.$$

В общем случае интерполяционный многочлен n-й степени проходит через $n + 1$ точку $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n)$, $x_i \neq x_j$ при $i \neq j$, и имеет вид

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_n)}.$$

Записанный в таком виде интерполяционный многочлен называют *интерполяционным многочленом Лагранжа*. Интерполяционный многочлен существует и единствен.

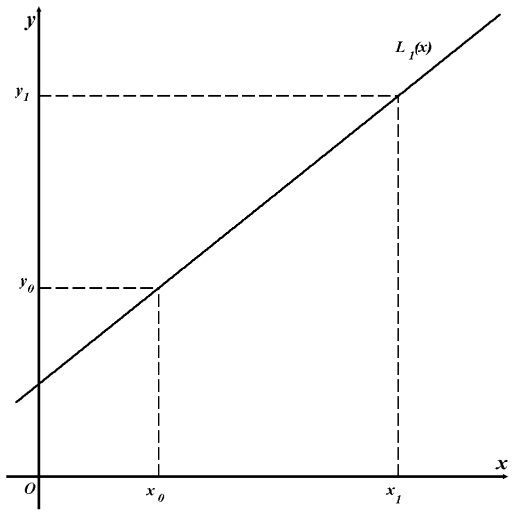

Рис. 2.1.2. Интерполяционный многочлен степени $n = 1$

Пример 2. Пусть $n = 2$. Интерполяционный многочлен проходит через точки (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2) и представляет собой параболу (рис. 2.1.3):

$$L_2(x) = y_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + y_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + y_2 \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)};$$

$$L_2(x_0) = y_0; \quad L_2(x_1) = y_1; \quad L_2(x_2) = y_2.$$

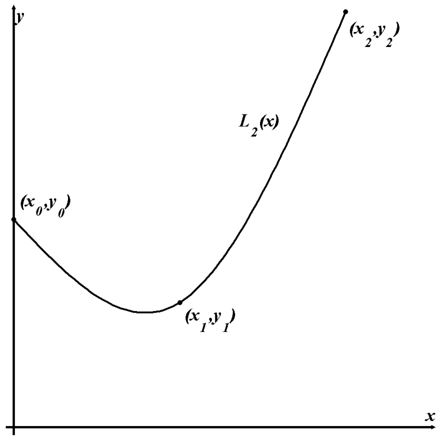

Рис. 2.1.3. Интерполяционный многочлен степени $n = 2$

Оценим *погрешность интерполяционного многочлена Лагранжа*.

Пусть $f(x)$ непрерывно дифференцируема $n+1$ раз. Оценим разность $f(x)-L_n(x)$ в фиксированной точке $x \neq x_i$, $i=0,\ 1,\ ...,\ n$ (рис. 1.2.4).

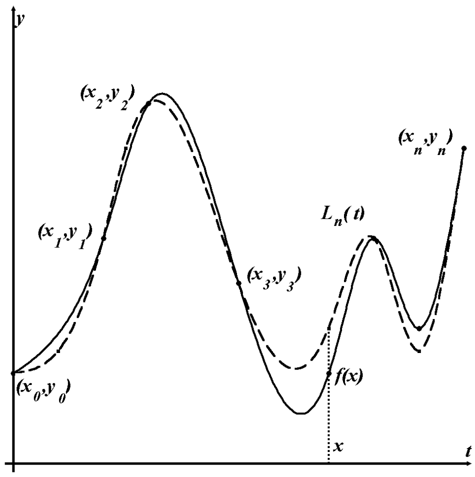

Рис. 2.1.4. Оценка погрешности интерполяционного многочлена Лагранжа в фиксированной точке x

Рассмотрим функцию

$$\varphi(t) = f(t) - L_n(t) - K\omega_n(t),$$

где K — некоторая константа; $\omega_n(t) = \prod_{i=0}^{n}(t - x_i)$. Функция $\varphi(t) = 0$ в точках $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$, так как $f(x_i) = L_n(x_i)$, а $\omega_n(x_i) = 0$, $i = 0, 1, ..., n$.

Выберем константу K таким образом, чтобы $\varphi(x) = 0$. Тогда $f(x) - L_n(x) - K\omega_n(x) = 0$ и $\varphi(x) = 0$ в $n + 2$ точках. Поэтому по теореме Ролля $\varphi'(t) = 0$ в n + 1 точках (рис. 2.1.5).

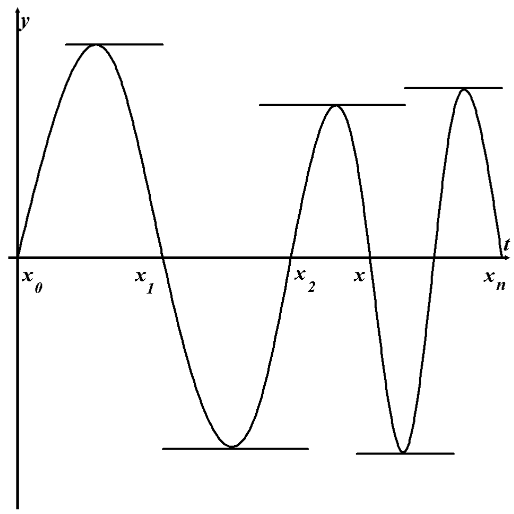

Рис. 2.1.5. Равенство нулю производной $\varphi'(t)$ в n+1 точке

Аналогично $\varphi''(t) = 0$ в n точках и т. д. Наконец, найдется точка ξ из интервала (x_0, x_n), такая, что $\varphi^{n+1}(\xi) = f^{n+1}(\xi) - K(n+1)! = 0$. Отсюда

$$K = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!},$$

поэтому

$$f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_n(x).$$

Получили оценку погрешности интерполяционного многочлена Лагранжа. Пусть

$$M_n = \max_{\xi \in [x_0, x_n]} |f^{(n)}(\xi)|,$$

тогда

$$|f(x) - L_n(x)| \le \frac{M_n}{(n+1)!} |\omega_n(x)|.$$

Недостатком интерполяции с помощью интерполяционного многочлена Лагранжа является то, что при небольшом значении n интерполяционный многочлен Лагранжа достаточно хорошо приближает гладкую функцию, а при большом значении n наблюдаются значительные колебания интерполяционного многочлена между узлами интерполяции.

2.2. Сплайн-интерполяция

Определение. Сплайном порядка m называется функция, являющаяся многочленом степени m на каждом из частичных интервалов $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, принимающая заданные значения y_i в узлах x_i, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ и имеющая непрерывные производные до $(m-1)$-го порядка включительно (рис. 2.1.1).

Рассмотрим более подробно случай, когда $m = 3$, — кубический сплайн.

На каждом из частичных интервалов $[x_{i-1}, x_i]$ сплайн будем искать в виде

$$f(x) = a_i + b_i(x - x_{i-1}) + c_i(x - x_{i-1})^2 + d_i(x - x_{i-1})^3,$$
$$x \in [x_{i-1}, x_i], \quad i = 1, 2, \ldots, n. \quad (2.2.1)$$

При этом из условия непрерывности в узлах сплайна его первых и вторых производных получаем

$$f(x_i - 0) = f(x_i + 0); \quad (2.2.2)$$

$$f'(x_i - 0) = f'(x_i + 0); \qquad (2.2.3)$$

$$f''(x_i - 0) = f''(x_i + 0); \qquad (2.2.4)$$

$$f''(x_0) = f''(x_n). \qquad (2.2.5)$$

Из (2.2.1) имеем $f(x_{i-1}) = y_{i-1} = a_i$, отсюда

$$f(x_i) = y_{i-1} + b_i h_i + c_i h_i^2 + d_i h_i^3,\ i = 1,\ 2,\ ..., n,$$

где $h_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, 2, ..., n.$

В то же время, если рассматривать сплайн (2.2.1) на интервале $[x_i, x_{i+1}]$, то $f(x_i) = y_i = a_{i+1}$.

Отсюда и из (2.2.2) получаем

$$y_i = y_{i-1} + b_i h_i + c_i h_i^2 + d_i h_i^3,\ \ i = 1, 2, ..., n. \qquad (2.2.6)$$

Найдем первую и вторую производные (2.2.1):

$$f'(x) = b_i + 2c_i(x - x_{i-1}) + 3d_i(x - x_{i-1})^2;$$

$$f''(x) = 2c_i + 6d_i(x - x_{i-1}).$$

Отсюда и из условий (2.2.3) и (2.2.4) следует

$$f'(x_i - 0) = b_i + 2c_i h_i + 3d_i h_i^2;$$

$$f'(x_i + 0) = b_{i+1};$$

$$b_i + 2c_i h_i + 3d_i h_i^2 = b_{i+1}; \qquad (2.2.7)$$

$$f''(x_i - 0) = 2c_i + 6d_i h_i\ ;$$

$$f''(x_i + 0) = 2c_{i+1};$$

$$2c_i + 6d_i h_i\ = 2c_{i+1}. \qquad (2.2.8)$$

Из (2.2.8) получаем

$$d_i = \frac{c_{i+1} - c_i}{3h_i}. \qquad (2.2.9)$$

Из (2.2.6) и (2.2.9) следует

$$b_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - c_i h_i - d_i h_i^2.$$

После подстановки d_i в последнее выражение получаем

$$b_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \frac{h_i}{3}(2c_i + c_{i+1}). \qquad (2.2.10)$$

Подставим (2.2.10) в (2.2.7):

$$\frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \frac{h_i}{3}(2c_i + c_{i+1}) + 2c_i h_i + 3d_i h_i^2 = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{h_{i+1}}{3}(2c_{i+1} + c_{i+2}).$$

Используя (2.2.9), находим

$$\frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \frac{h_i}{3}(2c_i + c_{i+1}) + 2c_i h_i + \frac{3(c_{i+1} - c_i)}{(3h_i)h_i^2} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{h_{i+1}}{3}(2c_{i+1} + c_{i+2}).$$

После упрощений получим СЛАУ с трехдиагональной матрицей; эту СЛАУ можно решить методом прогонки:

$$\frac{h_i}{3}c_i + \left(\frac{2}{3}h_i + \frac{2}{3}h_{i+1}\right)c_{i+1} + \frac{h_{i+1}}{3}c_{i+2} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i}, \quad i = 1, 2, ..., n-1. \qquad (2.2.11)$$

Из условия (2.2.5) и (2.2.8) имеем $c_1 = 0,\ \ c_{n+1} = 0.$

Условие (2.2.5) нужно было для единственности решения возникающей из (2.2.2)–(2.2.4) системы линейных уравнений.

Если узлы равноотстоящие, то шаг $h = (b-a)/n$, где $[a,b]$ — рассматриваемый отрезок, система (2.2.11) упрощается:

$$\frac{h}{3}c_i + \frac{4}{3}h\,c_{i+1} + \frac{h}{3}c_{i+2} = \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h}, \quad i = 1, 2, ..., n-1;$$
$$c_1 = 0,\ \ c_{n+1} = 0.$$

Остальные коэффициенты сплайнов находят по формулам

$$a_i = y_{i-1};$$

$$b_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h} - \frac{h}{3}(2c_i + c_{i+1});$$

$$d_i = \frac{c_{i+1} - c_i}{3h}, \quad i = 1, 2, ..., n.$$

Пусть $s_h(x)$ — кубический сплайн, построенный для функции $f(x)$ на интервале $[a,b]$ с равноотстоящими узлами, т. е. $s_h(a+ih) = f(a+ih)$, $i = 0, 1, ..., n.$ Тогда имеет место следующая теорема.

Теорема. Для функции $f \in C^{(4)}[a,b]$ справедливы оценки

$$\left\| f(x) - s_h(x) \right\|_{C[a,b]} \le M_4 h^4; \quad \left\| f'(x) - s_h{}'(x) \right\|_{C[a,b]} \le M_4 h^3;$$

$$\left\| f''(x) - s_h{}''(x) \right\|_{C[a,b]} \le M_4 h^2.$$

Из этих оценок следует, что при шаге $h \to 0$ (т. е. при $n \to \infty$) последовательности $s_h^{(i)}(x)$, $i = 0, 1, 2,$ сходятся соответственно к функциям $f^{(i)}(x)$, $i = 0, 1, 2.$

Задание к лабораторной работе «Сплайн-интерполяция»

1. Построить таблицу значений $y_i = f(a+ih)$ (табл. 2.2.1) на отрезке $[a,b]$ с шагом $h = (b-a)/n.$

2. По полученной таблице вычислить коэффициенты сплайна, используя метод прогонки.

3. Вычислить значения сплайна и заданной функции в серединах получившихся интервалов, т. е. в точках $\tilde{x}_i = a + (i - 0{,}5)h$, $i = 1, 2, ..., n.$

4. Вычисления произвести при числе разбиений n = 5, 25, 125.

Оформить таблицу, столбцами которой являются:

1) значения функции $\tilde{x}_i = a + (i - 0{,}5)h$, $i = 1, 2, 3, 4, 5;$

2) значения заданной функции $\tilde{y}_i = f(\tilde{x}_i),\ i = 1, 2, 3, 4, 5;$

3) значения сплайна при $n = 5$

$$y_i^{Spline5} = y_{i-1} + \frac{b_i h}{2} + \frac{c_i h^2}{4} + \frac{d_i h^3}{8},\ i = 1, 2, ..., n,$$

в серединах получившихся интервалов;

4) значения сплайна при $n = 25$

$$y_i^{Spline25} = y_{i-1} + \frac{b_i h}{2} + \frac{c_i h^2}{4} + \frac{d_i h^3}{8},\ i = 3 + 5j,\ \ j = 0, 1, 2, 3, 4,$$

т. е. в тех же точках, что и при $n = 5$;

5) значения сплайна при $n = 125$

$$y_i^{Spline125} = y_{i-1} + \frac{b_i h}{2} + \frac{c_i h^2}{4} + \frac{d_i h^3}{8},\ i = 13 + 25j,\ \ j = 0, 1, 2, ..., 24,$$

т. е. в тех же точках, что и при $n = 5$.

Убедиться, что при увеличении числа разбиений n качество сплайн-интерполяции повышается.

Таблица 2.2.1

Варианты функций

Вариант	Функция	Интервал
1	$e^x + \sin x^3$	[0, 2]
2	$\ln(2x-1) - \sin x^2$	[1, 3]
3	$\operatorname{arctg}(2x+3)$	[–1, 3]
4	$\sqrt{x+2} + \operatorname{tg} x$	[–1, 1]
5	$\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$	[0, π]
6	$\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$	[0, π]
7	$\arcsin(2x-1)$	[0, 1]
8	$\operatorname{sh} x$	[0, 2]
9	$\operatorname{ch} x$	[0, 2]
10	$\operatorname{th} x$	[0, 2]
11	$e^x - e^{2x}$	[–1, 1]

Окончание табл. 2.2.1

Вариант	Функция	Интервал
12	$\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$	$[0, \pi]$
13	$\ln(2x+1)+2\sin 3x$	[0, 3]
14	$e^{2x}-\cos 2x$	[0, 3]
15	$\ln(2x+1)+\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$	[0, 5]
16	$\dfrac{2x-1}{3x+1}+\sin\left(4x-\dfrac{\pi}{3}\right)$	[0, 3]
17	$\sqrt{2x+1}-\sin\left(5x-\dfrac{\pi}{6}\right)$	[0, 5]
18	$\operatorname{sh} x-\cos\left(5x-\dfrac{\pi}{3}\right)$	[–1, 4]
19	$\sqrt{9x-2}+\sin\left(3x+\dfrac{\pi}{3}\right)$	[1, 6]
20	$\operatorname{arctg}(2x+3)+\cos x^2$	[–2, 3]
21	$e^{2x}+\sin\left(5x-\dfrac{\pi}{4}\right)$	[–3, 3]
22	$\sin(\cos\sqrt{x+3})$	[–3, 3]
23	$\sin 2^{5x}$	[0, 1]
24	$x\sin x^2$	[0, 5]
25	$\dfrac{\sin 5x}{x}$	[0, 2]
26	$\cos(\sin x^2)$	[0, 3]
27	$\sqrt{x+2}+\cos(\sin x^2)$	[0, 3]
28	$\sqrt{2x-1}+\cos\left(5x+\dfrac{\pi}{6}\right)$	[1, 4]
29	$\operatorname{arctg}(2x-1)-\sin x^2$	[0, 3]
30	$\dfrac{2x+1}{3x-1}+\cos\left(4x+\dfrac{\pi}{3}\right)$	[1, 3]

2.3. Метод наименьших квадратов

Пусть известны значения y_i в узлах x_i, $i = 0, 1, 2, ..., n$; $\varphi(a_0, a_1, ..., a_m, x)$ — функция, зависящая от параметров a_0, a_1, ..., a_m. Рассмотрим функцию S:

$$S = \sum_{i=0}^{n} (\varphi(a_0, a_1, ..., a_m, x_i) - y_i)^2 = \sum_{i=0}^{n} \varepsilon_i^2.$$

Выберем параметры $a_0, a_1, a_2, ..., a_m$ так, чтобы минимизировать значение S, т. е. сумму квадратов невязок ε_i^2 (рис. 2.3.1).

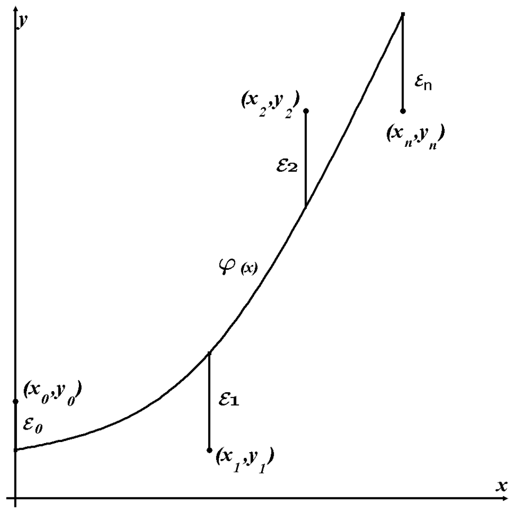

Рис. 2.3.1. Минимизация суммы квадратов невязок

Получим систему уравнений

$$\frac{\partial S}{\partial a_i} = 0, \quad i = 0, 1, 2, ..., m.$$

Эту систему уравнений (часто нелинейную) можно решить методом Ньютона.

Рассмотрим подробнее случай, когда функция $\varphi(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + ... + a_1x^1 + a_0$. Условие

$$\frac{\partial S}{\partial a_i} = 0, \quad i = 0, 1, 2, ..., m\ .$$

приводит к следующей СЛАУ:

$$\frac{\partial S}{\partial a_0} = 2\sum_{i=0}^{n}(a_m x_i^m + a_{m-1}x_i^{m-1} + ... + a_1 x_i^1 + a_0 - y_i)1 = 0;$$
$$\frac{\partial S}{\partial a_1} = 2\sum_{i=0}^{n}(a_m x_i^m + a_{m-1}x_i^{m-1} + ... + a_1 x_i^1 + a_0 - y_i)x_i = 0;$$
$$\frac{\partial S}{\partial a_2} = 2\sum_{i=0}^{n}(a_m x_i^m + a_{m-1}x_i^{m-1} + ... + a_1 x_i^1 + a_0 - y_i)x_i^2 = 0;$$
$$...$$
$$\frac{\partial S}{\partial a_m} = 2\sum_{i=0}^{n}(a_m x_i^m + a_{m-1}x_i^{m-1} + ... + a_1 x_i^1 + a_0 - y_i)x_i^m = 0.$$

Преобразуем ее к виду

$$(n+1)a_0 + \left(\sum_{i=0}^{n} x_i\right)a_1 + \left(\sum_{i=0}^{n} x_i^2\right)a_2 + ... + \left(\sum_{i=0}^{n} x_i^m\right)a_m = \sum_{i=0}^{n} y_i;$$
$$\left(\sum_{i=0}^{n} x_i\right)a_0 + \left(\sum_{i=0}^{n} x_i^2\right)a_1 + \left(\sum_{i=0}^{n} x_i^3\right)a_2 + ... + \left(\sum_{i=0}^{n} x_i^{m+1}\right)a_m = \sum_{i=0}^{n} x_i y_i;$$
$$\dots$$
$$\left(\sum_{i=0}^{n} x_i^m\right)a_0 + \left(\sum_{i=0}^{n} x_i^{m+1}\right)a_1 + \left(\sum_{i=0}^{n} x_i^{m+2}\right)a_2 + ... + \left(\sum_{i=0}^{n} x_i^{2m}\right)a_m = \sum_{i=0}^{n} x_i^m y_i.$$

Введем коэффициенты $b_{pq} = \sum_{i=0}^{n} x_i^{p+q}$, $c_p = \sum_{i=0}^{n} x_i^p y_i$.

Получим СЛАУ:

$$b_{00}a_0 + b_{01}a_1 + ... + b_{0m}a_m = c_0;$$
$$b_{10}a_0 + b_{11}a_1 + ... + b_{1m}a_m = c_1;$$

$$\ldots$$

$$b_{m0}a_0 + b_{m1}a_1 + \ldots + b_{mm}a_m = c_m.$$

Эту СЛАУ решаем методом Гаусса.

Пример. Пусть даны точки:

x	–1	0	1	2
y	1	–1	1	4

1. Найдем методом наименьших квадратов прямую $\varphi(x) = a_0 + a_1 x,$ на которой минимизируется сумма квадратов невязок. Получим систему уравнений

$$4a_0 + 2a_1 = 5;$$
$$2a_0 + 6a_1 = 8.$$

Отсюда $\varphi(x) = 0,7 + 1,1x$ (см. рис. 2.3.2).

2. Найдем методом наименьших квадратов параболу $\psi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, на которой минимизируется сумма квадратов невязок. Получаем систему уравнений

$$4a_0 + 2a_1 + 6a_2 = 5;$$
$$2a_0 + 6a_1 + 8a_2 = 8;$$
$$6a_0 + 8a_1 + 18a_2 = 18.$$

Решив ее, найдем, что (рис. 2.3.3) $\psi(x) = 1,25x^2 - 0,15x - 0,55.$

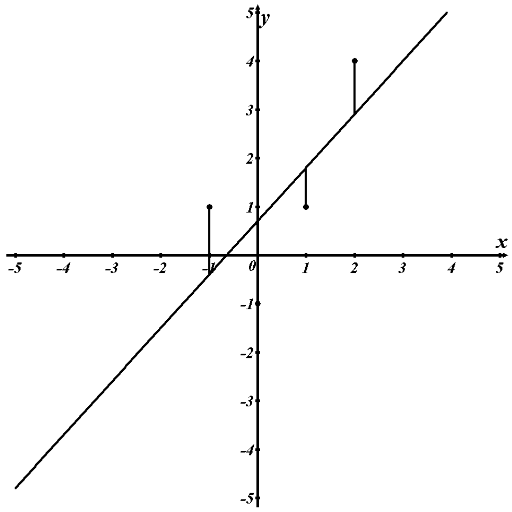

Рис. 2.3.2. Минимизация суммы квадратов невязок на прямой $\varphi(x) = 0,7 + 1,1x$

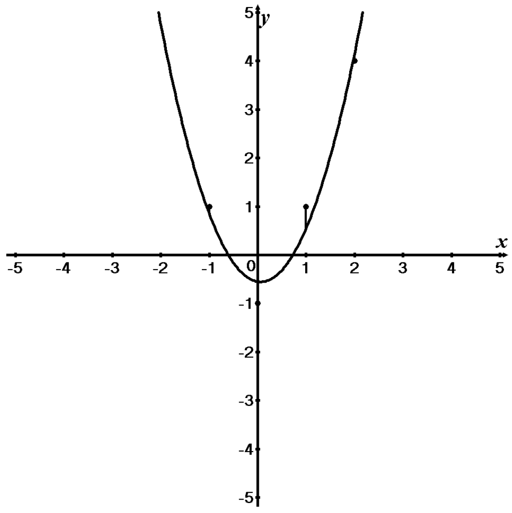

Рис. 2.3.3. Минимизация суммы квадратов невязок на параболе $\psi(x) = 1,25x^2 - 0,15x - 0,55$

Задание к лабораторной работе
«Метод наименьших квадратов»

1. Написать программу, которая строит таблицу значений $y_i = f(a+ih)$ (по табл. 2.2.1) на отрезке $[a,b]$ с шагом $h=(b-a)/n$, $n=10$. По полученной таблице методом наименьших квадратов найти линейную функцию, параболу и кубическую функцию, на которых минимизируется сумма квадратов невязок.

2. Результаты оформить в виде таблицы, столбцами которой являются:

1) значения $x_i = a+ih$, $i=1, 2, ..., n$;

2) значения заданной функции $y_i = f(x_i)$, $i=1, 2, ..., n$;

3) значения получившейся линейной функции $\varphi(x) = a_0 + a_1 x$ в точках x_i, $i=1, 2, ..., n$;

4) значения получившейся параболы $\psi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ в точках x_i, $i=1, 2, ..., n$;

5) значения получившейся кубической функции $\psi_3(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$ в точках x_i, $i=1, 2, ..., n$;

6) три столбца значений невязок для линейной функции, параболы и кубической функции в точках x_i, $i=1, 2, ..., n$;

7) суммарная невязка в нижней строке для соответствующих столбцов.

ЛИТЕРАТУРА

Амосов А.А., *Дубинский Ю.А.*, *Копченова Н.В.* Вычислительные методы для инженеров. М.: Высш. шк., 1994.

Бахвалов Н.С., *Жидков Н.П.*, *Кобельков Г.М.* Численные методы. М.: Наука, 1987.

Блюмин А.Г., *Гусев Е.В.*, *Федотов А.А.* Численные методы. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002. 48 с.

Блюмин А.Г., *Федотов А.А.*, *Храпов П.В.* Численные методы вычисления интегралов и решения задач для обыкновенных дифференциальных уравнений: Метод. указания: Электронное издание. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана. № гос. рег. 0320800709, 2008. 75 с. http://rk6.bmstu.ru/electronic_book/mathematic/fedotov_HM.pdf.

Вержбицкий В.М. Основы численных методов: Учеб. для вузов. М.: Высш. шк., 2005. 840 с.

Голосов А.О., *Федотов А.А.*, *Храпов П.В.* Численные методы вычисления интегралов и решения задачи Коши для ОДУ. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1992. 52 с.

Кокотушкин Г.А., *Храпов П.В.* Методические указания к решению задач. Численные методы. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1999. 44 с.

Кокотушкин Г.А., *Храпов П.В.* Методические указания к решению задач по курсу «Методы вычислений». М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001. 44 с.

Самарский А.А., *Вабищевич П.Н.*, *Е.А.Самарская*. Задачи и упражнения по численным методам: Учеб. пособие. Изд. 2-е, испр. М.: Едиториал УРСС, 2003. 208 с.

Самарский А.А., *Гулин А.В.* Численные методы. М.: Наука, 1989.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Кокотушкин Георгий Александрович
Федотов Анатолий Александрович
Храпов Павел Васильевич

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ АЛГЕБРЫ
И ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ

Редактор *Е.К. Кошелева*
Корректор *М.А. Василевская*
Компьютерная верстка *С.А. Серебряковой*

Подписано в печать 25.12.2010. Формат 60×84/16.
Усл. печ. л. 3,49. Тираж 600 экз. Изд. № 2. Заказ

Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана.
Типография МГТУ им. Н.Э. Баумана.
105005, Москва, 2-я Бауманская ул., 5.